

# ZAMANLA-YAVAŞ DEĞİŞKEN SÖNÜMLEMELİ KANALLARDA BLOK -TİP PİLOT-TON EKLEMELİ OFDM KANAL BELİRLEMEDE LS VE MMSE ALGORİTMALARININ BAŞARIMI

Sezin Yıldırım Özgür Ertuğ

Telekomunikasyon ve Sinyal İşleme Laboratuvarı, TESLAB

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Gazi Üniversitesi, Ankara

e-posta: sezin3108@gmail.com, ertug@gazi.edu.tr

## ÖZET

OFDM tabanlı olan kablosuz ağ uygulamalarında çok taşıyıcı iletimde veri sembollerinin belirlenmesinde yüksek doğruluğun sağlanabilmesi için alıcı tarafta kanal kestiriminin düşük hata seviyelerinde yapılması gerekmektedir. Bu işlemin başarılı bir şekilde yapılmaması durumunda veri sembollerinin belirlenmesi düzgün gerçekleşmeyecektir. Bu bildiride zamanla-yavaş-değişken sönmlemeli kanallarda dikgen frekans bölmeli çoğullama (OFDM) sistemlerinde blok-tip pilot ton eklemeli kanal belirlemede en-küçük-kareler (LS) ve minimum-ortalama-karesel-hata (MMSE) algoritmalarının ortalama-karesel-hata (MSE) açısından başarımları ve bu MSE değerleri altında erişilen sembol hata-oranı (SER) değerleri karşılaştırılmalı olarak analiz edilmiştir.

## 1. GİRİŞ

OFDM tekniği 1960lardan bu yana kullanılan yüksek data hızı ve yüksek güç verimliliği avantajlarına sahip olan, çoklu-yol sönmlemeli kanal kayıplarına ve veri alt-taşıyıcıları arasındaki girişimlere karşı büyük ölçüde kazanımlar sağlayan ve bu avantajları nedeniyle DAB, DVB ve DSL gibi önemli haberleşme teknolojilerde kullanılan bir haberleşme tekniğidir. Pek çok kablolu ve kablosuz uygulama alanına sahip olan OFDM mevcut band genişliğini diğer tekniklere göre daha verimli kullanan ve bunu yaparken oluşan bozucu etkilere karşı yüksek direnç gösteren bir çalışma prensibine sahiptir. Verilerin alt-taşıyıcılara ayrılarak iletiildiği OFDM, matematiksel olarak dikgen olan dar-bantlı alt-taşıyıcıların birbirleriyle örtüşmesine rağmen komşu kanalların hiçbir girişim göstermediği bir veri iletim tekniğidir.[1-3]

OFDM sistemlerinin birden çok alt-taşıyıcıya sahip olması nedeniyle iletilen veri sembollerinin belirlenmesinde yüksek doğruluğun sağlanabilmesi için alıcı tarafta OFDM sinyalinin demodülasyonundan önce kanal kestiriminin düşük hata seviyelerinde yapılması gerekmektedir [6]. Bu işlemin başarılı bir şekilde yapılmaması durumunda ise veri sembollerinin belirlenmesi düzgün bir

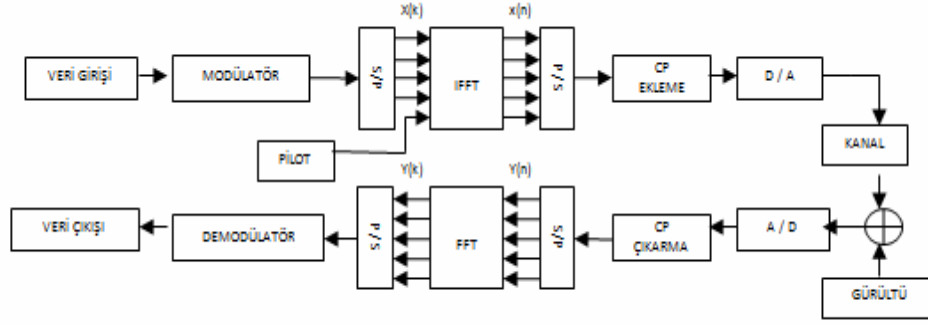
biçimde gerçekleşmeyecek ve bu yüzden veri iletimindeki sembol hata oranı yükselecektir.

Kanal kestirim aşamasında genel olarak pilot-ton eklemeli kanal kestirimi veya kör kanal kestirimi yöntemleri kullanılmaktadır. Kör kanal kestiriminde gönderilen veri içinde alıcının bildiği herhangi bir dizin yoktur ve kanal belirleme tamamen bilinmeyen veriler üzerinden gerçekleştirilir. Pilot-ton eklemeli kanal kestirim yöntemlerinde ise blok-tip ve tarak-tip olmak üzere 2 yöntem vardır. Blok-tipte her bir alt-taşıyıcıya pilot tonlar eklenmesine karşın tarak-tipte OFDM sembol dizinine pilot semboller eklenmektedir. Blok-tip ve tarak-tip kanal kestirim yöntemlerinde En-Küçük-Kareler (LS- Least-Squares) ve Minimum-Ortalama-Karesel-Hata (MMSE – Minimum-Mean-Square-Error) en temel olarak kullanılan kanal kestirim algoritmalarıdır. LS kestirimcisi sayısal kompleksitesi düşük bir algoritmaya ve kolay bir uygulanabilirliğe sahip olmasına karşın düşük SNR değerlerinde sergilediği düşük performans sebebiyle başarılı bir kestirimci olarak kabul edilmemektedir. MMSE kestirimcisi ise düşük SNR değerlerinde sergilediği yüksek performansla rağmen kanalın istatistiksel bilgilerine ihtiyaç duyan sayısal kompleksitesi yüksek karmaşık bir algoritmaya sahiptir.[4-7]

Bu bildirinin ikinci bölümünde OFDM sisteminin temel prensipleri tanıtılacak, üçüncü bölümde ise LS ve MMSE kanal kestirimcilerinin matematiksel tanımlamaları yapılacaktır. Dördüncü bölümde ise LS ve MMSE kestirimcilerinin zamanla-yavaş değişken sönmlemeli kanallardaki başarımları karşılaştırılmalı olarak analiz edilecektir.

## 2. SİSTEM TANITIMI

OFDM, sistemdeki veri dizinini mevcut frekans aralığını birden çok alt-taşıyıcıya bölerek bu alt-taşıyıcılar vasıtasıyla ileten bir haberleşme tekniğidir. Oluşturulan bu alt-taşıyıcıların her biri yeterli frekans aralığına sahiptir ve matematiksel olarak birbirlerine dikgendir. Bu durum dar-bantlı olan alt-taşıyıcıların birbirleriyle örtüşmesine rağmen komşu kanalların girişim yapmasını engeller. Bu sayede yüksek spektral verimlilik elde edilir. [3,7]



Şekil 1 : OFDM sisteminin genel yapısı

Bir OFDM sisteminin gönderici ve alıcısının kanal dahil blok diyagramı Şekil.1'de verilmiştir. OFDM sistemlerinde veri iletimi paketler halinde yapılır. Seri olarak gelen, modülasyon türüne göre gruplanan veriler modülasyon işleminden geçer ve paralel hale dönüştürülür. Bu aşamada sisteme kanal tahmininde kullanılan pilot tonlar eklenir ve ardından IFFT'si alınır. Kullanılan IFFT/FFT vektörünün boyutu sistemin direncini belirlerken bu işlem sistemin frekans domeninden zaman domenine geçmesini sağlar. Bu işlemin ardından tekrar seri hale gelen sinyallere simgeler arası girişime engel olmak için çevrimsel öntakı (CP) eklenir. Dijital-analog çeviriciden geçen ve RF yükseltilen OFDM sinyali aşağıdaki (1) yapısındaki çok-yollu sönümlenmeli kanal üzerinden iletilir [4]:

$$h(t) = \sum_{m=1}^M \alpha_m \delta(t - \tau_m T_S) \quad (1)$$

$\alpha_m$  : kompleks ve  $0 \leq \tau_m T_S \leq T_G$ .

Alıcı kısma geldiğinde semboller ilk olarak analog-dijital çeviriciden geçer ve çevrimsel öntakısı çıkarılır. Bu aşamada alınan sinyal;

$$y(n) = x(n) \otimes h(n) + w(n) \quad (2)$$

biçimindedir. Bunun ardından sinyalin FFT'si alınır ve tekrar frekans domenine dönmüş olan sinyal ;

$$Y(k) = X(k)H(k) + W(k) \quad (3)$$

şeklinde ifade edilir.

Eşitlik matris olarak ifade edilecek olursa FFT matrisi:

$$W_N^{i,k} = (1/\sqrt{N})^{-j2\pi(ik/N)} \quad (4)$$

olmak üzere:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} W_N & \dots & W_N^{0(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_N^{(N-1)0} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

şeklindedir . Bu durumda çıkış sinyali:

$$\bar{Y} = \underline{X} \underline{F} \bar{h} + \bar{W} \quad (6)$$

$$\bar{Y} = \underline{X} \bar{H} + \bar{W} \quad (7)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadede:

$$\underline{X} = \text{diag}(\bar{X}) = \text{diag}(X(0), X(1), \dots, X(N-1)) \quad (8)$$

$$\bar{Y} = [Y_0 Y_1 \dots Y_{N-1}]^T \quad (9)$$

$$\bar{H} = [H_0 H_1 \dots H_{N-1}]^T \quad (10)$$

$$\bar{W} = [W_0 W_1 \dots W_{N-1}]^T \quad (11)$$

şeklindedir. [5-8]

### 3. PİLOT TON EKLEMELİ KANAL KESTİRİM YÖNTEMİ

Alıcıda elde edilen sinyalden iletimde olan sinyalin elde edilebilmesi için kanal dürtü cevabının kestirilmesi gerekmektedir. Bu işlemin yapılabilmesi için LS ve MMSE kestirimcileri kullanılır.

### 3.1. LS KANAL KESTİRİM YÖNTEMİ İLE KANAL DÜRTÜ CEVABININ BULUNMASI

LS algoritması  $(\bar{Y} - \underline{X}\bar{H})^H (\bar{Y} - \underline{X}\bar{H})$  ifadesini, yani çıkış ile kanalla ölçeklenmiş veri dizininin farkını en-küçük-kareler formunda minimize etmeye çalışır. Bu durumda paha fonksiyonu:

$$(\bar{Y} - \underline{X}\bar{F}\bar{h})^H (\bar{Y} - \underline{X}\bar{F}\bar{h}) \quad (12)$$

minimize edilir ve:

$$\hat{H}_{LS} = \underline{F}h_{LS} = \underline{F}(\underline{F}^H \underline{X}^H \underline{X}\underline{F})^{-1} \underline{F}^H \underline{X}^H \bar{Y} \quad (13)$$

açılımı üzerinden:

$$\hat{H}_{LS} = \underline{X}^{-1} \bar{Y} \quad (k=0,1,\dots,N-1) \quad (14)$$

şeklindeki kanal dürtü cevabı kestirilir. [4-8]

### 3.2. MMSE KANAL KESTİRİM YÖNTEMİ İLE KANAL DÜRTÜ CEVABININ BULUNMASI

MMSE algoritması çıkış ile kanalla ölçeklenmiş veri dizininin farkının ortalama-karesel-hatasını minimize eder. MMSE algoritmasında kanalın aşağıdaki istatistiksel bilgileri kullanılır:

$\underline{R}_{YY}$  :  $\bar{Y}$  nin otokovaryans matrisi

$\underline{R}_{hY}$  :  $\bar{h}$  ve  $\bar{Y}$  nin kovaryans matrisi

$\sigma_w^2$  : gürültünün varyansı  $E\{|\bar{W}|^2\}$

Burada alınan sinyalin otokovaryans matrisi ve kanalla alınan sinyalin otokovaryans matrisi:

$$\underline{R}_{hY} = E\{h\bar{Y}^H\} = \underline{R}_{hh} \underline{F}^H \underline{X}^H \quad (15)$$

$$\underline{R}_{YY} = E\{\bar{Y}\bar{Y}^H\} = \underline{X}\underline{F}\underline{R}_{hh}\underline{F}^H \underline{X}^H + \sigma_w^2 I_W \quad (16)$$

şeklinde ifade edilir.

Kanal vektörü ve kanal gürültüsü ilişkisiz ise:

$$h_{MMSE} = \underline{R}_{hY} \underline{R}_{YY}^{-1} \bar{Y} \quad (17)$$

$$\hat{H}_{MMSE} = \underline{F}h_{MMSE} = \underline{F}\underline{R}_{hY} \underline{R}_{YY}^{-1} \bar{Y} \quad (18)$$

eşitliği ile kanal dürtü cevabı kestirilir. [4-8]

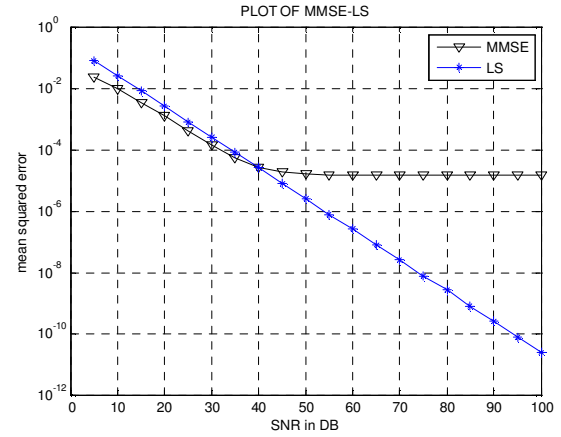
### 4. BAŞARIM ANALİZİ

LS ve MMSE algoritmalarının kanal kestirimi ve performansı ve bu kestirim teknikleri altında OFDM sisteminin başarımları için yapılan simülasyonlarda simülasyon parametreleri olarak IEEE 802.11a OFDM WLAN sisteminin Standard parametreleri kullanılmıştır.

Tablo 1 : IEEE 802.11a sistem parametreleri

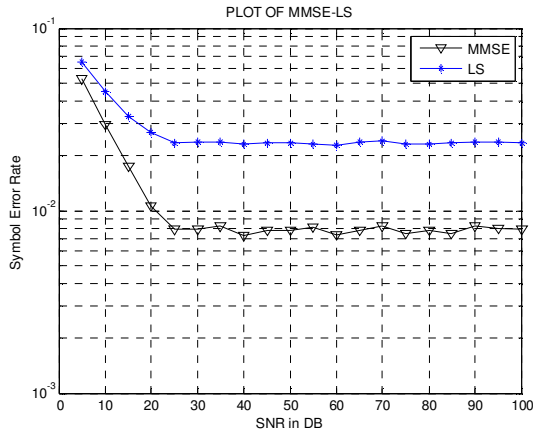
Parametre	Değer
Örnekleme frekansı	20MHz
FFT boyutu	64
Alt taşıyıcı sayısı	48
Alt taşıyıcı frekans boşluğu	0.3125MHz (20MHz/64)
Koruma arası süresi	0.8 $\mu$ s

Simülasyonlarda OFDM sinyalleri BPSK modülasyon ile modüle edilmiştir. LS ve MMSE kanal kestirim algoritmalarının zamanla-yavaş değişken sönmülemeli kanallardaki performans değerleri ortalama karesel hata (MSE: Mean Square Error) ve sembol hata oranı (SER :Symbol Error Rate) kriterleri kullanılarak karşılaştırılmıştır.



Şekil 2 : MMSE ve LS algoritmalarının MSE açısından karşılaştırmalı başarımları

Şekil.2'de blok-tip pilot-ton eklemeli OFDM kanal belirlemede LS ve MMSE algoritmalarının eriştiği MSE, sembol SNR'ına karşı BPSK modülasyon için gösterilmiştir. LS algoritmasının SNR' a karşı MSE'si SNR ile monoton olarak azalmakta iken MMSE algoritmasının MSE'si yaklaşık 40 dB 'den sonra belirli bir taban değeri olan  $10^{-5}$  değerine yakınsamaktadır. Buradan da anlaşılacağı gibi MMSE algoritması, düşük SNR değerlerinde yüksek bir performans gösterse de yüksek SNR değerlerinde LS, MMSE algoritmasına kıyasla daha iyi bir kestirme performansı sergilemektedir.



Şekil.3 : MMSE ve LS algoritmalarının SER açısından karşılaştırmalı başarımları

Şekil.3’de ise MMSE ve LS algoritmaları ile kanal kestirimi yapılmış BPSK-OFDM sisteminin SNR’a karşı erişilen SER değerleri grafiklendirilmiştir. Her iki algoritmanın da SER’leri  $10^{-2}$  civarında taban değerlerine ulaşmaktadır. MMSE’nin SER değerleri tüm SNR’larda LS’den daha iyidir. Güç verimliliği açısından  $10^{-2}$  gibi düşük SER’lere ulaşmak için MMSE ile LS arasındaki fark yaklaşık 10 dB dir. Bununla beraber MMSE’nin sayısal karmaşıklığı da LS’e göre oldukça yüksektir.

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada LS ve MMSE kanal kestirim algoritmalarının zamanla-yavaş değişken sönmülemeli kanallardaki başarımları incelenmiştir. Simülasyon sonuçlarından elde edilen bilgilere göre düşük SNR değerine sahip kablosuz ağ uygulamalarında MMSE kanal kestirimcisi LS kanal kestirimcisine oranla daha iyi sonuçlar vermektedir. Ancak MMSE algoritmasının gürültü varyansı ve kanal kovaryansı gibi kanalın istatistiksel bilgilerine ihtiyaç duyması algoritmanın karmaşıklığını artırmakta ve bu durum sistemin gerçek-zamanlı uygulanımını zorlaştırmaktadır. Kanal üzerinden alınan SNR değeri arttıkça MMSE kanal kestirimcisinin hata oranı taban değerine ulaşırken LS kanal kestirimcisinin hata oranı monoton olarak azalmaktadır. Ayrıca LS algoritmasının basitliği ve bundan kaynaklı olarak sistemin daha rahat biçimde gerçek-zamanlı uygulanımı yüksek SNR değerli bir durumda yapılacak olan kablosuz ağ uygulamalarında LS kanal kestirimcisinin kullanımını tercih edilir hale getirmektedir.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] Chunlong H., Li H., "Pilot-Aided Channel Estimation Techniques in OFDM System," pp.143-146, 2009 International Conference on Communication Software and Networks, 2009
- [2] Weinstein S. B., Ebert P.M., "Data Transmission by Frequency Division Multiplexing Using the Discrete Fourier Transform", IEEE

Transactions on Communication Technology, 19(3), 628-634, 1971.

- [3] Cimini L. J., "Analysis and Simulation of Digital Mobile Channel Using Orthogonal Frequency Division Multiplexing", IEEE Transactions on Communications, 42(2), 2908-2914, 1994.
- [4] Van de Beek J.J., Edfors O., Sandell M., Wilson S. K., Börjesson P. O., "On Channel Estimation In OFDM Systems", Proc. Of the IEEE 45<sup>th</sup> Vehicular Technology Conf., 815-819, Chicago, 1995
- [5] Coleri S., Ergen M., Puri A., Bahai A., "Channel Estimation Techniques Based on Pilot Arrangement in OFDM Systems", IEEE Transactions On Broadcasting, Vol.48, No.3, September 2002
- [6] Coleri S.; Ergen M.; Puri A.; Bahai A., "A Study Of Channel Estimation In OFDM Systems", IEEE Trans. Comm., Volume 2, 2002
- [7] Tuna E., Seyman M.N., Özyazgan G., Taşpınar N., "OFDM Sistemlerinde Pilot Ton Eklemeli Kanal Kestirim Yöntemleri", XII. Elektrik, Elektronik, Bilgisayar, Biyomedikal Mühendisliği Ulusal Kongresi, s. 14-18 Kasım 2007, Eskişehir.
- [8] Seyman M. N., Tuna E., Taşpınar N., "OFDM Sistemlerinde Pilot Ton Eklemeli Kanal Kestirim Yöntemlerinin Rayleigh Sönümlü Kanal İçin Performanslarının İncelenmesi", III. İletişim Teknolojileri Ulusal Sempozyumu (İTUSEM 2007) Bildiriler Kitabı, s.123-126, 18-19 Ekim 2007, Adana.
- [9] Schulze H., Lüders C., "Theory and Applications of OFDM and CDMA", John Wiley & Sons, Inc, England, 2005
- [10] Goldsmith A., "Wireless Communications", Cambridge University Press, England 2005