

DİNAMİK ÇIKIŞ GERİ BESLEMELİ VE BÖLGESEL KUTUP ATAMA KISITLAMALI DAYANIKLI (ROBUST) H_∞ OPTİMAL KONTROL

Yücel AYDIN¹

M. Kemal SARIOĞLU²

^{1,2} Kontrol ve Kumanda Sistemleri Anabilim Dalı
Elektrik-Elektronik Fakültesi
İstanbul Teknik Üniversitesi, 80626. Maslak, İstanbul

¹e-posta: aydinyl@elk.itu.edu.tr

²e-posta: sarioglu@elk.itu.edu.tr

Anahtar sözcükler: Dayanıklı (Robust) Kontrol, H_∞ Optimal Kontrol, Bölgesel Kutup Atama

ABSTRACT

This paper addresses the problem of dynamic output feedback robust H_∞ optimal control with regional pole constraints. The problem can be formulated a optimization problem involving LMI, Lineer Matrix Inequalities. The main purpose of the robust optimal control problem is to minimize H_∞ norm of the the closed loop transfer function matrix under regional pole constraints.

1. GİRİŞ

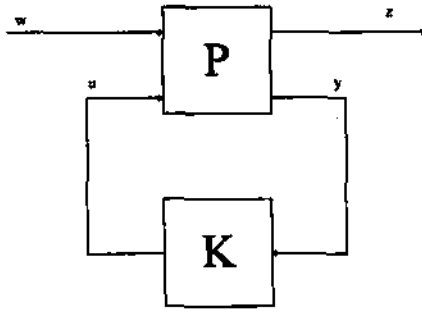
H_∞ optimal kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımı, dayanıklı kararlılık (robust stability) probleminin çözümünde önem taşımaktadır. Ele alınan kontrol edilen sistem için H_∞ sentez probleminde amaç, dış girişlerden kontrol edilen çıkışlara enerji transferini minimize edecek bir kontrolör tasarlamaktır. Önemli kontrol problemlerinin çoğu H_∞ sentez probleminin alışılmış genel yapısına dönüştürülerek çözülebilir. H_∞ teknikleri dayanıklılık (robustness) açısından H_2 kontrol yöntemlerine kıyasla bozuculara karşı daha iyi dayanıklılık sağlar. Modern kontrol sistemleri tasarımında gerekli pratik özelliklerden birisi, kapalı çevrim kontrol sisteminin geçici ve sürekli hal davranışlarıdır. Zaman tanım bölgesi performans özelliklerinden kapalı çevrim sisteminin sıfır ve kutuplarının sol yarı m s düzlemindeki yeriyle belirlenir ve etkilenir. Kararlılık yanında, istenilen bir performans, kapalı çevrim kutupları kompleks düzlemde verilen bir bölgeye atamayla sağlanır. Bunun için de yapılması gereken dayanıklı kutup atama tasarımıdır. Bu tasarımda, kapalı çevrim sisteminin kutuplarının bölgesel yeri

üzerinde bazı kısıtlamaların konulması amaçtır. Kapalı çevrim sistemlerinin atanacak kutupları için sol yarı kompleks düzlemde seçilen bölgeler, geçici cevap karakteristikleri için bir gösterge olarak değerlendirilir. Bu yüzden kapalı çevrim kutupları üzerine bazı kısıtlamalar getirmek gereklidir. İstenilen kısıtlama bölgesi D, birkaç matris eşitsizlikleriyle gösterilebilir [7]. Bazı durumlarda kutup atama bölgesi D seçilen birkaç bölgenin arakesiti olabilir. Bu LMI bölgeleri, söz konusu kontrol problemlerinin birçok pratik gereksinimlerini karşılar. Bu konuda çoğu makaleler kutup atama problemini durum geribeslemesi yaparak incelemiştir. Bu çalışmada ise dinamik çıkış geribeslemesi altında bölgesel kutup atama gerçekleştirilmiş ve dayanıklı optimal ölçütleride sağlanmıştır.

Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI'lar) kapalı çevrim sistemi üzerinde birkaç kısıtlamayı bir arada kullanmada daha çok esneklik sağlar. Bu sebeple, bölgesel kutup kısıtlamalı H_∞ kontrol sentezi LMI'larla ifade edilen konveks bir optimizasyon problemi olarak formüle edilebilir. LMI tekniklerinin sözü edilen bu avantajlarından dolayı, kontrol problemlerinde LMI yaklaşımları, araştırmacılar tarafından son yıllarda çok önemli bulunmaktadır [11],[12].

2. DAYANIKLI (ROBUST) H_∞ OPTİMAL KONTROL

Genel H_∞ optimal kontrol problemine ilişkin blok diyagramı Şekil 1 de verilmiştir. Bu blok diyagramında; w dış giriş vektörünü, u giriş kontrol vektörünü, P kontrol edilen sistemi içeren Plantı, z ve y sırasıyla kontrol edilen büyüklüklere ve ölçülebilen büyüklüklere ilişkin çıkış vektörlerini ve K da çıkış geribeslemeli kontrolörü gösterir.



Şekil 1. H_∞ Optimal Kontrol problemine ilişkin genel bir kapalı çevrim kontrol sisteminin blok diyagramı

Plant ve kontrolörün durum uzayı denklemleri ve matrisel gösterimleri aşağıda verilmiştir.

Plant **P**:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u\end{aligned}\quad (1)$$

Kontrolör **K**:

$$\begin{aligned}\dot{x}_k &= A_k x_k + B_k y \\ u &= C_k x_k + D_k y\end{aligned}\quad (2)$$

w vektör girişlerinden z vektörü çıkışlarına ilişkin kapalı çevrim kontrol sisteminin transfer fonksiyon matrisi ise,

T_{zw} :

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= A_d x_d + B_d w \\ z &= C_d x_d + D_d w\end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Dayanıklı optimal kontrolde H_∞ -norm kısıtlaması, kapalı çevrim kontrol sisteminin H_∞ performansını ifade eder. Sistemin dayanıklı kararlılık (robust stability) derecesini belirleyen bir kararlılık ölçütüdür. **Kutup atama kısıtlaması** ise kapalı çevrim kutuplarının sistemden beklenen geçici cevaplarını da karşılayacak bir LMI kararlılık bölgesine atanmasını sağlar. Bu tasarım kısıtlamalarının LMI 'larla ifade edilmesi mümkündür.

Kontrol edilmek istenen sistem, sınırlı boyutlu lineer zamanla değişmeyen (LTI) bir sistemdir ve transfer fonksiyon matrisi,

$$P(s) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}\quad (3)$$

olarak yazılabilir. İfadelerdeki matrisler uygun boyutlu matrislerdir.

Kontrol problemine Lineer Matris Eşitsizliği (LMI) yaklaşımındaki varsayımlar en fazla ikiyi geçmez. Sınırlı boyutlu bir LTI sistemi için, gerekli olan bu varsayımlar aşağıda verilmiştir.

- 1) (A, B_2, C_2) kararlılaştırılabilir ve denetlenebilir olmalıdır.
- 2) $D_{22}=0$ basitlik açısından alınabilir ancak zorunlu değildir. [7],[11]

Tasarımdaki amaç ise, dinamik çıkış geribeslemesi $u=K(s)y$ halinde H_∞ kontrolörünün aşağıda verilen amaç ölçütü ve kısıtlamalar altında optimal olarak belirlenmesidir.

Performans ölçütü,

$$J = \|T_{zw}\|_\infty^2$$

olarak tanımlanır. Bu amaç ölçütü, 1) H_∞ kararlılık ölçütünü belirleyen $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ eşitsizlik kısıtlaması (γ kısıtlaması),
2- Sol yarım s bölgelerine bölgesel kutup yerleştirme kısıtlaması, altında minimize edilir.

Dayanıklı kontrola ilişkin Yardımcı Teorem:

A,B,C,D uygun boyutlu, sabit elemanlı matrisler olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- i) A kararlı bir matris ise

$$T_{zw} = \|C(sI - A)^{-1}B + D\|_\infty < \gamma \quad (5)$$

dir.

- ii) Aşağıdaki Lineer Matris Eşitsizliğini (LMI) γ sağlayan

$$\begin{bmatrix} A_d^T X_d + X_d A_d & X_d B_d & C_d^T \\ B_d^T X_d & -\gamma I & D_d^T \\ C_d & D_d & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

simetrik bir $X_d > 0$ matrisi vardır.

Bu yardımcı teorem kullanılarak, Şekil 1 'de verilen kapalı çevrim kontrol sisteminin T_{zw} transfer matrisine ilişkin $(A_d, B_d, C_d$ ve $D_d)$ parametre matrisleri belirlenebilir. Böylece de, (ii) deki matris eşitsizliğini sağlayan simetrik $X_d > 0$ ve $X_d \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)}$ matrisinin bulunması ile k. mertebeden γ optimele yakın kontrolörler belirlenmiş olur.

Burada A_k, B_k, C_k ve D_k kontrolör parametreleri olmak üzere

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k \\ B_k C_2 & A_k \end{bmatrix}$$

$$B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_k D_{21} \\ B_k D_{21} \end{bmatrix}$$

$$C_{cl} = [C_1 + D_{12} D_k C_2 \quad D_{12} C_k]$$

$$D_{cl} = D_{12} D_k D_{21}$$

dir.

Bölgesel Kutup Atama Kısıtlamasının LMI 'larla modellenmesi:

Bir kapalı çevrim kontrol kutuplarının aşağıda tanımlanan LMI bölgesi içinde olması,

$$D = \{z \in \mathbb{C} : L + Mz + M^T \bar{z} < 0\} \quad (8)$$

(Burada,

$$L = L^T = [\lambda_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$$

$$M = [\mu_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$$

)

dir, ancak ve ancak

$$[\lambda_{ij} X_{pol} + \mu_{ij} A_{cl} X_{pol} + \mu_{ij} X_{pol} A_{cl}^T]_{1 \leq i, j \leq m} < 0 \quad (9)$$

matris eşitsizliğini sağlayan simetrik X matrisinin var olması ile mümkündür. [7],[12]

Her bir kısıtlamanın LMI karşılığı olan tüm bu LMI eşitsizlikleri aynı anda gerçekleşeceğinden

$$X \hat{=} X_{cl} = X_{pol}$$

almır.

X, faktörize edildiğinde $X = X_1 X_2^{-1}$

$$X_1 := \begin{bmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 := \begin{bmatrix} 0 & S \\ S & N^T \end{bmatrix} \quad (10)$$

elde edilir.

$u=Ky$ dinamik çıkış geribeslemesi halinde matris eşitsizlikleri yardımı ile H_∞ kontrolörünün optimal olarak tasarımı; amaç ölçütü

$$J = \|T_{zw}\|_\infty^2$$

'nin R, S, A_k, B_k, C_k, D_k ve γ üzerinde yukarıda verilen matris eşitsizliklerini sağlamak üzere minimize edilmesi ile gerçekleştirilir.

Optimizasyon değişkenleri olarak kontrolör parametreleri belirlenir. Buradan da çıkış

geribeslemeli dinamik kontrolörün K(s) transfer matrisi yazılırsa

$$K(s) := D_k + C_k (sI - A_k) B_k$$

olur.

3. TASARIM SONUÇLARI

Aşağıda dinamik denklemleri verilen iki kütle ve bir yaydan oluşan ve kaynaklar [11] 'de yer alan bir Benchmark sistemi ele alınmıştır.

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) + u$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + w$$

$$y = x_2$$

Burada; w bozucu giriş, y ise ölçülebilen bir çıkıştır. k parametresi belirsizliğe sahiptir ve (0.5-2) aralığında değerler almaktadır. Burada kütlelere ilişkin parametreler; $m_1=1$ ve $m_2=1$ seçilmiştir. $u=Ky$

dinamik çıkış geribeslemesi durumunda sistemin H_∞ performans ölçütünü belirtilen kısıtlamalar altında minimize edecek kontrolörler, seçilen k parametresine ve kutup atama bölgesine bağlı olarak tasarlanmıştır. İstenilen kısıtlamaları sağlayan optimal performansta kontrolörlere ilişkin tasarım sonuçları, LMI Control Toolbox[13] 'da kullanarak MATLAB 'da program yazılmasıyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir. Bu örneklerde, $z_\infty = x_2$ olarak seçilmiştir.

(1)—LMI Bölgesi, D sol yarı s düzlemi,

k=0.5 için

$$gopt = \gamma^* =$$

$$0.6146$$

$$K(s) =$$

$$-56.1066 s^4 - 351854.6858 s^3 - 174077.128 s^2 - 202045.1475 s - 148293.0253$$

$$s^4 + 167.353 s^3 + 11364.9088 s^2 + 52315.6461 s + 128222.9831$$

kutuplar =

$$-81.2959 + 63.0069i; -81.2959 - 63.0069i$$

$$-0.7292 + 1.9325i; -0.7292 - 1.9325i$$

$$-1.6515 + 0.7472i; -1.6515 - 0.7472i$$

$$-0.0000 + 0.7071i; -0.0000 - 0.7071i$$

k=1 için

$$gopt = \gamma^* =$$

$$0.4383$$

$$K(s) =$$

$$-63.3294 s^4 - 276262.8499 s^3 - 123647.673 s^2 - 340687.558 s - 291375.129$$

$$s^4 + 248.5556 s^3 + 12550.9469 s^2 + 64668.6983 s + 180352.0879$$

kutuplar =

$$1.0e+002 *$$

$$-1.8125 ; -0.6188$$

$$-0.0082 + 0.0231i; -0.0082 - 0.0231i$$

$$-0.0189 + 0.0087i; -0.0189 - 0.0087i$$

$$-0.0000 + 0.0100i; -0.0000 - 0.0100i$$

k=2 için

$$gopt = \gamma^* = 0.3069$$

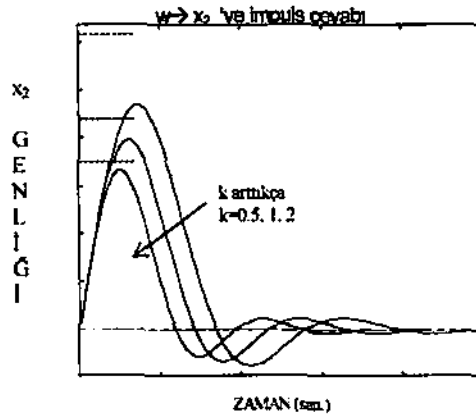
K(s)=

$$-90.8377 s^4 - 253583.9377 s^3 - 77889.8918 s^2 - 698651.0755 s - 692296.9316$$

$$s^4 + 477.6177 s^3 + 16903.4032 s^2 + 96688.0581 s + 302345.9552$$

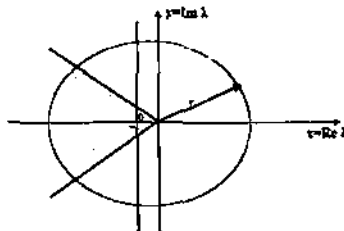
kutuplar =

$$1.0e+002 * \\ -4.3967 \quad ; \quad -0.3171 \\ -0.0092 + 0.0278i; -0.0092 - 0.0278i \\ -0.0000 + 0.0141i; -0.0000 - 0.0141i \\ -0.0220 + 0.0098i; -0.0220 - 0.0098i$$



Şekil 2. (1) seçimi için x durum eğrileri

(2)— D : Birkaç LMI Bölgesinin Arakesiti (Şekil 3)
 $\alpha=0.25, \theta=\pi/4, r=25$



Şekil3. Seçilen taralı bölge olan LMI bölgesi
 k=0.5 için

$$gopt = \gamma^* = 1.3307$$

K(s)=

$$-81.737 s^4 - 247848.002 s^3 - 166761.6369 s^2 - 190287.3433 s - 61160.4446$$

$$s^4 + 79.0335 s^3 + 3766.8113 s^2 + 25722.6451 s + 78365.0822$$

kutuplar =

$$-35.7766 + 43.9092i; -35.7766 - 43.9092i$$

$$-1.1334 - 1.4019i; -1.1334 - 1.4019i \\ -2.1632 + 0.6503i; -2.1632 - 0.6503i \\ -0.4437 + 0.6148i; -0.4437 - 0.6148i$$

k=1 için

$$gopt = \gamma^* = 0.9995$$

K(s)=

$$-93.2955 s^4 - 194360.4015 s^3 - 119511.7534 s^2 - 247202.1492 s - 99057.5092$$

$$s^4 + 81.3962 s^3 + 3905.5063 s^2 + 31004.1609 s + 109498.3339$$

kutuplar =

$$-36.2753 + 43.7640i \\ -36.2753 - 43.7640i \\ -2.6011 + 0.8111i \\ -2.6011 - 0.8111i \\ -1.2618 + 1.6877i \\ -1.2618 - 1.6877i \\ -0.5598 + 0.7852i \\ -0.5598 - 0.7852i$$

k=2 için

$$gopt = \gamma^* = 0.7698$$

K(s)=

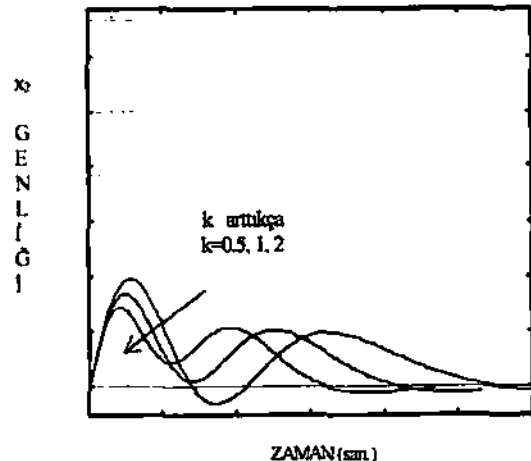
$$-94.6603 s^4 - 149203.7127 s^3 - 60805.8648 s^2 - 333306.0465 s - 165721.6779$$

$$s^4 + 87.155 s^3 + 4014.9271 s^2 + 36895.6985 s + 152170.3604$$

kutuplar =

$$-38.3151 + 41.1638i; -38.3151 - 41.1638i \\ -3.1177 + 1.2881i; -3.1177 - 1.2881i \\ -1.4084 + 2.0344i; -1.4084 - 2.0344i \\ -0.7363 + 0.9809i; -0.7363 - 0.9809i$$

w → x₂ 'ye impuls cevabı



Şekil 4. (2) seçimi için x durum eğrileri

5. SONUÇ

Bu çalışmada, dinamik çıkış geribeslemesi ve bölgesel kutup atama kısıtlamasını sağlayan dayanıklı optimal kontrolörlerin tasarımı ele alınmıştır. LMI Control Toolbox [13] kullanılarak ele alınan sisteme ilişkin istenenleri gerçekleyen tasarım sonuçları elde edilmiştir. Kontrol edilen çıkışın çeşitli k parametre değerlerine ve seçilen kutup atama bölgesine ilişkin elde edilen optimal γ 'ya bağlı eğrileri incelendiğinde bozucu girişlere karşı sistemin dayanıklılığı, tasarlanan optimal kontrolörlerle sağlanmıştır. Bölgesel kutup atama kısıtlamasının, seçilen bir LMI bölgesi içinde kapalı çevrim kontrol sisteminin kutuplarının atanmasıyla gerçekleşmesi sonucu sistemin atanan kutuplarının seçilen bölge içinde kaldığı ve belirtilen özellikleri sağladığı elde edilen sonuçlarla da görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] Aydın, Y., *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Ocak 2000
- [2] Aydın Y., Sarioğlu M.K., *Bölgesel Kutup Atamalı H_∞ Optimal Kontrol*, Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği. 8.Ulusal Kongresi, s531-535, 1999.
- [3] Boyd, S.P. and El Ghaoui, L., Method of centers for minimizing generalized eigenvalues, *Linear Algebra and Applications*, 63-111, 1993.
- [4] Boyd, S., Balakrishnan, V., Feron, E. and El Ghaoui, L., Control System Analysis and Synthesis via Linear Matrix Inequalities, *Proc American Control Conf.*, San Francisco, USA, 2147-2154, 1993.
- [5] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V., 1994, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, Vol. 15, Philadelphia: SIAM.
- [6] Chilali, M. and Gahinet, P., 1994, H_∞ design with an α -stability constraint, in *IFAC Proc.*
- [7] Chilali, M. and Gahinet, P., 1996, H_∞ Design with Pole Placement: An LMI Approach, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 41, 359-367.
- [8] Dorf, R.C. and BISHOP, R.H., 1997. Modern Control Systems, Addison -Wesley.
- [9] Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P. and Francis, B.A., 1989, State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 34, 831-847.
- [10] Doyle, J.C., Francis, B.A., and Tannenbaum A.R., 1992, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, New York.
- [11] Gahinet, P. and Apkarian, P., 1994, A Linear Matrix Inequality approach to H_∞ control, *Int.J. Robust Nonlinear Control*, 4, 421-448.
- [12] Gahinet, P. and Nemirovski, A., Laub, A.J., and Chilali, M., 1994, The LMI Control Toolbox, *Proc. of the 33rd Conference on Decision and Control, Florida, USA, December, 2038-2041.*
- [13] Gahinet, P. and Nemirovski, A., Laub, A.J., and Chilali, M., 1995, LMI Control Toolbox, The MathWorks, Inc., Natick.
- [14] Geromel, J.C. and Garcia, G. and Bernussou B., 1991, H_2 Robust Control with Pole Placement, *12th IFAC World Congress Aut. Cont.*, Sidney, Australia, 283-288.
- [15] Haddad, W.M. and Bernstein, D.S., 1992, Controller design with regional pole constraints, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37, 54-69.
- [16] Jamshidi, M., Tarokh, M. and Shafai, B., 1992, Computer-Aided Analysis and Design of Linear Control Systems, Prentice-Hall International Inc., London.
- [17] Li X.P., Chang B.C., Banda S.S. and Yeh H.H., 1992, Robust Control Systems Design Using H_∞ Optimization Theory, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 15, 944-952.
- [18] Ogata, K., 1990, Modern Control Engineering, Prentice-Hall International Inc., London.
- [19] Packard, A., Zhou, K., Pandey, P. ve Becker, G., 1991, A collection of robust control problems leading to LMI's, *Proc. CDC (Conference on Control and Decision)*, 1245-1250.
- [20] Sivashankar, N., Kaminer, I. and Khargonekar, P.P., 1994, Optimal Controller Synthesis with D Stability, *Automatica*, 30, 1003-1008.
- [21] Vidyasagar, M., 1986, Optimal Rejection of Persistent Bounded Disturbances, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 32, 527-534.
- [22] Yedavalli, R.K. and Liu, Y., 1993, H_∞ Control with Regional Stability Constraints, *Automatica*, 31, 611-615.
- [23] Zadeh, L. and Desoer, C., 1963, *Linear Systems Theory: The State Space Approach*, Mc. Graw-Hill, New York, NY.