

PI KONTROLÖR TASARIMI VE PERFORMANS ANALİZİ

Abdullah YENİGÜN¹ ve Nusret TAN²

¹Yüksek Lisans Öğrencisi

²İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü,
44280, Malatya. e-posta: ntan@inonu.edu.tr

Anahtar sözcükler: Kararlılık, PI kontrol, Kararlılık bölgesi, Kazanç payı, Faz payı, Step cevabı

ABSTRACT

This paper deals with the computation of all stabilizing PI controllers. A method called the stability boundary locus approach is described. A program is prepared in the Matlab environment for computation of all stabilizing PI controllers of some commonly used standard transfer functions. Performance analysis of the control systems using the stability region is studied.

1. GİRİŞ

PID kontrolörler, dayanıklı performans ve basit yapıları sebebiyle endüstride sıklıkla kullanılmaktadırlar. Gerçekten, %90 dan fazla kontrolör yapısı PID yapısında veya daha çok pratik uygulamalarda türevsel kısmının sık kullanılmaması sebebiyle PI şeklindedir [1]. Bu kontrolörlerin parametrelerini belirlemek için kullanılan bir çok metot [2-3] son 60 yılda gelişme göstermiştir. En popüler metotlardan bazıları: Ziegler - Nichols ayarlama metotları, Cohen-Coon kuralları, Åström-Hägglund metodu, gelişmiş Ziegler-Nichols metodu, dahili model kontrol (IMC) tasarım yaklaşımı, kazanç ve faz payına dayanan tasarımlar ve integral performans kriterlerine dayanan diğer metotlardır. Son zamanlarda ise karalı tüm P, PI ve PID kontrolörlerin hesabıyla ilgili birçok önemli sonuç elde edilmiştir [4-13].

PI kontrolör yapısı basit ve bir çok kontrol sistemi için çok iyi sonuçlar sağlayan bir kontrolör yapısı olduğu için bir kontrol sistemini kararlı yapabilecek iki parametresinin bütün değerlerinin hesaplanması önemli olacaktır. Makale, bu problem ile ilgilidir ve kararlılık sınır eğrisinin (k_p, k_i) düzleminde çizimine dayalı bir metot tanıtmaktadır [7-8]. Kararlılık sınır eğrisi kontrolör parametrelerine ve frekansa bağlıdır.

Örneğin, $l(k_p, k_i, \omega)$ gösterimi (k_p, k_i) düzleminde kararlılık sınır eğrisini ifade etmektedir. Kararlılık sınır eğrisi ω 'ya bağlı olduğu için ω 0'dan ∞ 'a kadar değişebilir. Fakat hangi frekans aralığında kararlı kontrolör parametrelerinin bulunabileceği ve çizim için gerekli frekans aralığının tahmin edilebileceği çalışmada gösterilmiştir. Dolayısıyla özetlenen metotla bir kontrol sistemini kararlı yapabilecek tüm PI kontrolör parametrelerinin çok hızlı hesaplanabilir. Ayrıca verilen metot, kullanıcı için gerekli kazanç payı ve faz payı değerlerini de sağlayan tüm kararlı PI katsayı aralığını hesaplayabilmektedir. Bu değerler bir kontrol sisteminin performansı ile ilgili değerlerdir. Matlab ortamında hazırlanan programlarla sıkça kullanılan bazı standart formdaki transfer fonksiyonlarını kararlı yapacak bütün PI kontrolörler kolayca hesaplanabilmektedir. Hesaplanan kararlı bölgede seçilen kontrolörlerin sistemin performansına etkileri de incelenebilmektedir.

2. PI KONTROLÖR KULLANARAK

KARARLILIK

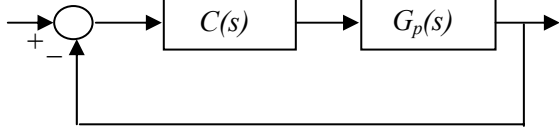
Şekil 1 de verilen tek giriş-tek çıkışlı sistemde

$$G_p(s) = G(s)e^{-\tau s} = \frac{N(s)}{D(s)}e^{-\tau s} \quad (1)$$

kontrol edilmek istenen sistemin transfer fonksiyonunu ve $C(s)$ de

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s} \quad (2)$$

formundaki bir PI kontrolörü göstermektedir. Amacımız şekil 1 de verilen sistemi kararlı yapan denklem (2) deki PI kontrolörün tüm parametrelerini hesaplamaktır.



Şekil 1: Bir tek giriş-tek çıkışlı kontrol sistemi

Sistemin kapalı çevirim karakteristik denklemi

$$\Delta(s) = sD(s) + (k_p s + k_i)N(s)e^{-s\tau} \quad (3)$$

Şeklinde yazılabilir. Denklem (1) de $s = j\omega$ alınarak, $G(s)$ 'in pay ve paydasının tek ve çift kısımlarını yazarsak,

$$G(j\omega) = \frac{N_e(-\omega^2) + j\omega N_o(-\omega^2)}{D_e(-\omega^2) + j\omega D_o(-\omega^2)} \quad (4)$$

Basit gösterim açısından $(-\omega^2)$ ler bundan sonraki denklemlerde yazılmayacaktır. Böylece Denklem (3) teki karakteristik denklem

$$\begin{aligned} \Delta(j\omega) &= [(k_i N_e - k_p \omega^2 N_o) \cos(\omega\tau) \\ &+ \omega(k_i N_o + k_p N_e) \sin(\omega\tau) - \omega^2 D_o] \\ &+ j[\omega(k_i N_o + k_p N_e) \cos(\omega\tau) \\ &- (k_i N_e - \omega^2 k_p N_o) \sin(\omega\tau) + \omega D_e] \\ &= R_\Delta + jI_\Delta = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

yazılabilir. Sonra, $\Delta(j\omega)$ 'nin reel ve sanal kısımları sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned} k_p(-\omega^2 N_o \cos(\omega\tau) + \omega N_e \sin(\omega\tau)) \\ + k_i(N_e \cos(\omega\tau) + \omega N_o \sin(\omega\tau)) = \omega^2 D_o \end{aligned} \quad (6)$$

ve

$$\begin{aligned} k_p(\omega N_e \cos(\omega\tau) + \omega^2 N_o \sin(\omega\tau)) \\ + k_i(\omega N_o \cos(\omega\tau) - N_e \sin(\omega\tau)) = -\omega D_e \end{aligned} \quad (7)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= -\omega^2 N_o \cos(\omega\tau) + \omega N_e \sin(\omega\tau) \\ R(\omega) &= N_e \cos(\omega\tau) + \omega N_o \sin(\omega\tau) \end{aligned} \quad (8)$$

$$X(\omega) = \omega^2 D_o$$

ve

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \omega N_e \cos(\omega\tau) + \omega^2 N_o \sin(\omega\tau) \\ U(\omega) &= \omega N_o \cos(\omega\tau) - N_e \sin(\omega\tau) \\ Y(\omega) &= -\omega D_e \end{aligned} \quad (9)$$

tanımlanırsa Denklem (6) ve (7) şu şekilde yazılabilir

$$\begin{aligned} k_p Q(\omega) + k_i R(\omega) &= X(\omega) \\ k_p S(\omega) + k_i U(\omega) &= Y(\omega) \end{aligned} \quad (10)$$

Bu denklemlerden

$$k_p = \frac{X(\omega)U(\omega) - Y(\omega)R(\omega)}{Q(\omega)U(\omega) - R(\omega)S(\omega)} \quad (11)$$

ve

$$k_i = \frac{Y(\omega)Q(\omega) - X(\omega)S(\omega)}{Q(\omega)U(\omega) - R(\omega)S(\omega)} \quad (12)$$

Denklem (8) ve (9), Denklem (11) ve (12) de yerine yazılırsa,

$$k_p = \frac{(\omega^2 N_o D_o + N_e D_e) \cos(\omega\tau) + \omega(N_o D_e - N_e D_o) \sin(\omega\tau)}{-(N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (13)$$

ve

$$k_i = \frac{\omega^2(N_o D_e - N_e D_o) \cos(\omega\tau) - \omega(N_e D_e + \omega^2 N_o D_o) \sin(\omega\tau)}{-(N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (14)$$

olduğu görülür. Denklem (13) ve (14) kullanılarak, kararlılık sınır eğrisi, $l(k_p, k_i, \omega)$, (k_p, k_i) düzleminde çizilebilir. Kararlılık sınır eğrisi elde edildikten sonra sistemi kararlı yapacak PI kontrolörlerin bölgesi bulunabilir. Çünkü kararlılık sınır eğrisi ile $k_i = 0$ doğrusu parametre düzlemini yani (k_p, k_i) düzlemini karalı ve kararsız bölgelere böler. Bu bölgelerde seçilecek kontrolörün parametre değerleri kullanılarak hangi bölgenin sistemi kararlı yapacak parametreler içerdiği bulunabilir. Burada $k_i = 0$ doğrusu kararlılık bölgesinin bir sınırır çünkü $\Delta(s)$ 'in bir reel kökü $s = 0$ da sanal eksen keser. Dolayısıyla Denklem (5) te $\omega = 0$ için I_Δ zaten sıfır olmaktadır ve $\omega = 0$ için R_Δ 'yı sıfıra eşitlersek $k_i = 0$ elde edilir.

Görüleceği gibi kararlılık sınır eğrisi frekansa yani ω ya bağlıdır ve ω da 0 dan ∞ a değişmektedir. Fakat kararlılık sınır eğrisini ω_c gibi kritik bir frekans değerine kadar çizmemiz yeterli olacaktır. Çünkü Denklem (1) deki $G_p(s)$ 'in $s = j\omega_c$ de fazı -180° ye eşit olduğu için,

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega N_o}{N_e}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega D_o}{D_e}\right) - \omega\tau = -\pi \quad (15)$$

veya

$$\tan(\omega\tau) = \frac{\omega(N_o D_e - N_e D_o)}{N_e D_e + \omega^2 N_o D_o} = f(\omega) \quad (16)$$

yazılabilir. Dolayısıyla, ω_c Denklem (16)'nin $(0, \pi)$ aralığında çözümünden elde edilir. $\tan(\omega\tau)$ ve $f(\omega)$ yı ω 'ya karşılık çizdiğimizde ω_c , $\tan(\omega\tau)$ ve $f(\omega)$ 'nın kesiştiği en küçük ω değeridir.

Bilindiği gibi kazanç payı ve faz payı klasik kontrol teorisinde kontrolör tasarımı için kullanılan iki önemli

performans ölçüsüdür. Yukarıdaki yaklaşım istenilen faz ve kazanç paylarını sağlayan PI kontrolörlerin bulunması için de kullanılabilir. Şekil 1 de verilen kontrol sistemine kazanç-faz payı test edicisi,

$$G_{gp}(s) = Ae^{-j\phi}, \text{ eklenirse}$$

$$k_p = \frac{(\omega^2 N_o D_o + N_e D_e) \cos(h) + \omega(N_o D_e - N_e D_o) \sin(h)}{-A(N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (17)$$

and

$$k_i = \frac{\omega^2(N_o D_e - N_e D_o) \cos(h) - \omega(N_e D_e + \omega^2 N_o D_o) \sin(h)}{-A(N_e^2 + \omega^2 N_o^2)} \quad (18)$$

denklemleri elde edilir. Burada $h = \omega\tau + \phi$ dir.

Kararlılık sınır eğrisini verilen A kazanç değeri için elde etmek istediğimizde, Denklem (17) ve (18) de $\phi = 0$ yazılmalıdır. Diğer taraftan istenilen faz payı ϕ için ise $A = 1$ yazılmalıdır.

3. STANDART FORMDAKİ BAZI TRANSFER FONKSİYONLARIN KARARLILIĞI

Bu bölümde geliştirilmiş olan programın bazı uygulamaları gösterilecektir. Şimdilik program

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s}$$

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-\tau s}$$

$$G(s) = \frac{1}{s} e^{-\tau s}$$

$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^2} e^{-\tau s}$$

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 1}$$

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{(s + 1)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)}$$

$$G(s) = \frac{K}{(s + 1)^n}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

formdaki transfer fonksiyonları kararlı yapacak bütün PI kontrolörlerin hesaplanmasını kolaylaştırmaktadır. İleride program daha da geliştirilerek kolay kullanımlı hale dönüştürülecektir.

Örnek 1: Şekil 1 deki kontrol sisteminde

$$G_p(s) = \frac{s^3 + 4s^2 - s + 1}{s^5 + 2s^4 + 32s^3 + 14s^2 - 4s + 50} \quad (19)$$

Denklem (13) ve (14) ten

$$k_p = \frac{-\omega^8 + 23\omega^6 + 94\omega^4 - 210\omega^2 + 50}{-\omega^6 - 18\omega^4 + 7\omega^2 - 1} \quad (20)$$

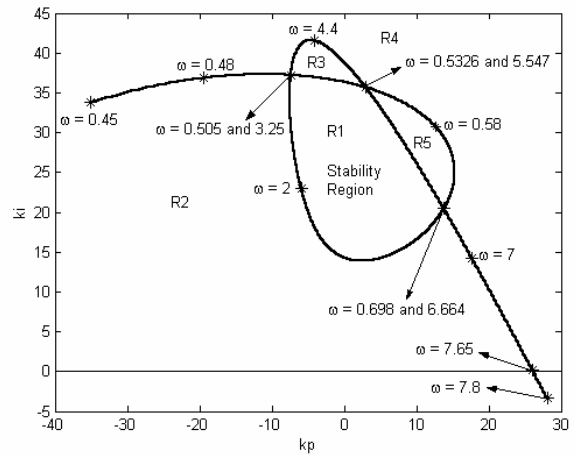
ve

$$k_i = \frac{2\omega^8 - 117\omega^6 - 20\omega^4 - 46\omega^2}{-\omega^6 - 18\omega^4 + 7\omega^2 - 1} \quad (21)$$

elde edilir. Bu denklemler kullanılarak kararlılık sınır eğrisi elde edilir. Örneğin, kararlılık sınır eğrisi yani $l(k_p, k_i, \omega)$ $\omega \in [0.45, 7.8]$ için Şekil 2 de görülmektedir. Şekilde de görüldüğü gibi kararlılık sınır eğrisi (k_p, k_i) düzlemini R1, R2, R3, R4 ve R5 ile gösterilen bölgelere ayırmaktadır. Bu bölgelerde test noktaları seçilerek hangi bölgenin kararlı olduğu bulunabilir. Örneğin, R5 bölgesinde seçilen $k_p = 13$

ve $k_i = 25$ değerleri için sistemin karakteristik denkleminin sağ yarı düzlemde iki kökü vardır. Dolayısıyla R5 bölgesi kararlı bölge değildir. Sistemi kararlı yapacak tek bölgenin R1 bölgesi olduğu test edilebilir. Örneğin, R1 bölgesinde seçilen $k_p = 5$ ve $k_i = 20$ için sistemin karakteristik polinomu

$\Delta(s) = s^6 + 2s^5 + 37s^4 + 54s^3 + 71s^2 + 35s + 20$ kararlı bir polinomdur. Sistemi kararlı yapan bütün k_p ve k_i değerlerini içeren R1 bölgesi Şekil 3 te görülmektedir.



Şekil 2: Kararlılık sınır eğrisi

Örnek 2: Şekil 1 de

$$G_p(s) = \frac{27}{(s - 0.1)(s + 2.8)^3} e^{-\tau s} \quad (22)$$

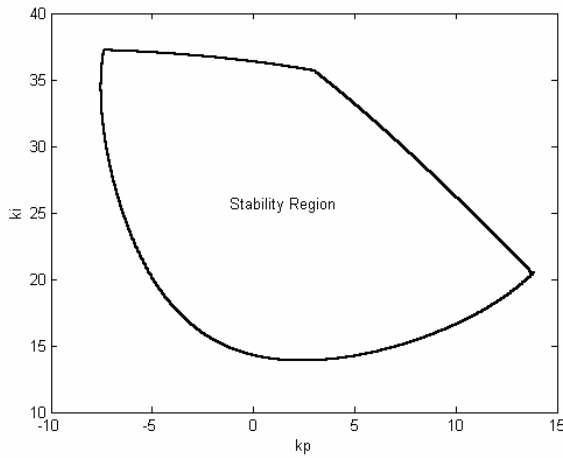
olsun. Denklem (13) ve (14) ten

$$k_p = (-0.037\omega^4 + 0.84\omega^2 + 0.0813)\cos(\tau\omega) + (-0.3074\omega^3 + 0.726\omega)\sin(\tau\omega) \quad (23)$$

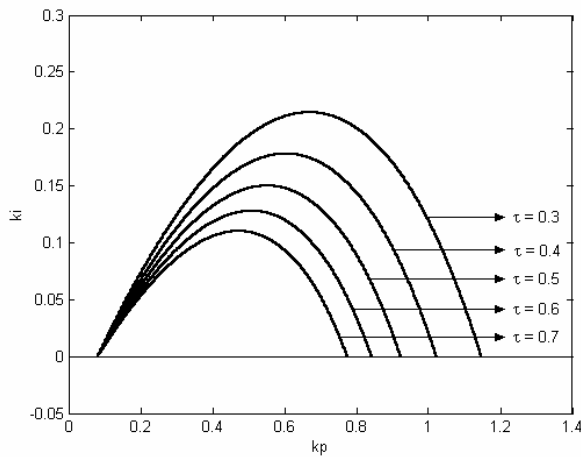
ve

$$k_i = (-0.3074\omega^4 + 0.727\omega^2)\cos(\tau\omega) + (0.037\omega^5 - 0.84\omega^3 - 0.0813\omega)\sin(\tau\omega) \quad (24)$$

elde edilir. $\tau = 0.3$, $\tau = 0.4$, $\tau = 0.5$, $\tau = 0.6$ ve $\tau = 0.7$ için kararlı bölgeler Şekil 4 te görülmektedir. Burada zaman gecikmesinin kararlı bölge üzerinde önemli derecede etkili olduğu gözlemlenir.



Şekil 3: Sistemi kararlı yapan bütün PI kontrolörler



Şekil 4: Farklı τ değerleri için kararlılık bölgeleri

Örnek 3: Şekil 1 de

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^2} e^{-s} \quad (25)$$

olsun. Amaç sistemin kazanç payını 2.5 tan büyük ve faz payını da 45° den büyük yapacak bütün PI kontrolörlerini bulmaktır. Denklem (12) ve (13) ten

$$k_p = 2\omega \sin(\omega) - (-\omega^2 + 1)\cos(\omega) \quad (26)$$

ve

$$k_i = \omega(-\omega^2 + 1)\sin(\omega) + 2\omega^2 \cos(\omega) \quad (27)$$

ve Şekil 5 te kararlı bölge verilmiştir. Sistemin faz payını 45° den büyük yapacak PI kontrolörlerini bulmak için Denklem (17) ve (18) de $A = 1$ ve $\phi = 45^\circ$ alınır

$$k_p = 2\omega \sin(h) - (-\omega^2 + 1)\cos(h) \quad (28)$$

ve

$$k_i = \omega(-\omega^2 + 1)\sin(h) + 2\omega^2 \cos(h) \quad (29)$$

elde edilir. Burada $h = \omega + \pi/4$ dir. Kararlılık sınır eğrisi $\phi = 45^\circ$ ve $\omega \in (0, 0.895)$ için Şekil 5 te görülmektedir. Benzer şekilde $\phi = 0$ ve $A = 2.5$ alınır

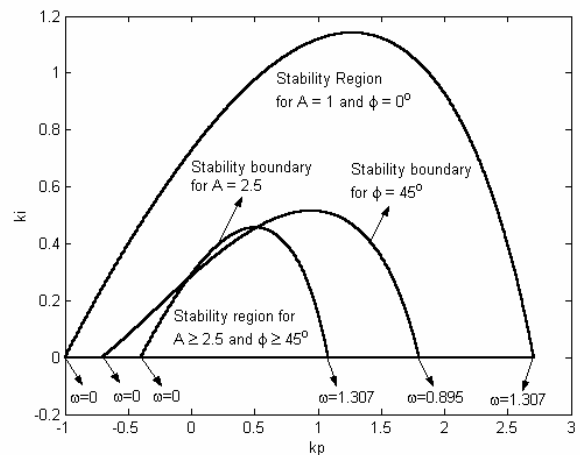
$$k_p = 0.8\omega \sin(\omega) - 0.4(-\omega^2 + 1)\cos(\omega) \quad (30)$$

ve

$$k_i = 0.8\omega^2 \cos(\omega) + 0.4\omega(-\omega^2 + 1)\sin(\omega) \quad (31)$$

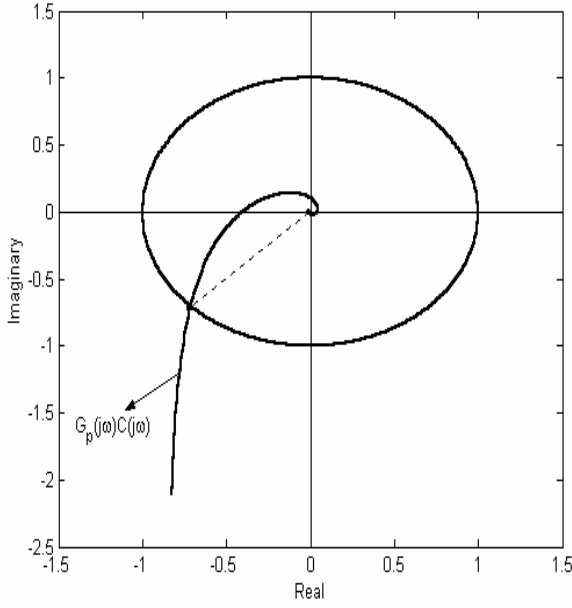
denklemleri elde edilir. Kararlılık sınır eğrisi $A = 2.5$ ve $\omega \in (0, 1.307)$ için Şekil 5 te verilmiştir. Sistemin

faz payını 45° den büyük ve kazanç payını da 2.5 tan büyük yapan bütün k_p ve k_i değerleri bu iki bölgenin kesişiminden oluşur. Örneğin iki bölgenin kesişim noktalarından birine karşılık gelen $k_p = 0.52$ ve $k_i = 0.46$ değerleri için $G_p(j\omega) C(j\omega)$ 'nin Nyquist diyagramı Şekil 6 de çizilmiştir. Şekil 6 da faz payının 45° ve kazanç payının 2.5 derece olduğu görülmektedir. $A \geq 2.5$ ve $\phi \geq 45^\circ$ bölgesinde seçilen değişik k_p ve k_i değerleri için sistemin step tepkisi Şekil 7 de verilmiştir.

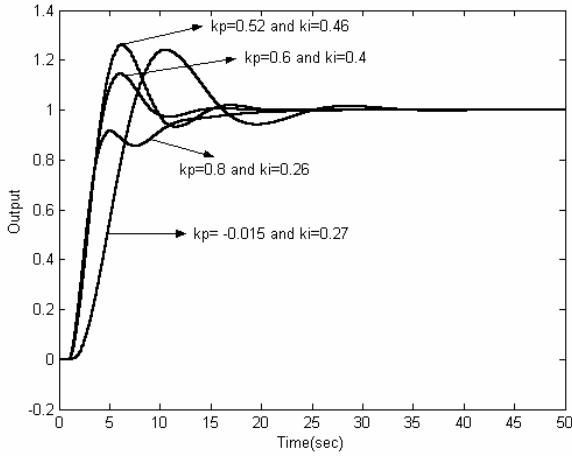


Şekil 5: $\phi \geq 45^\circ$ ve $A \geq 2.5$ için kararlılık bölgesi

KAYNAKLAR



Şekil 6: Nyquist diyagramı



Şekil 7: Farklı k_p ve k_i değerler için step tepkiler

5. SONUÇLAR

Bu bildiride bir kontrol sistemini kararlı yapacak bütün PI kontrolörlerin hesaplanması incelendi. Bazı sıkça kullanılan standart formdaki transfer fonksiyonlarını içeren kontrol sistemlerini kararlı yapan PI kontrolörlerin hesaplanmasını kolaylaştıracak Matlab ortamında hazırlanmış programlar geliştirildi. Bu programlar kullanılarak bir kontrol sisteminin performansı ile ilgili olan istenilen faz ve kazanç payını sağlayan bölgeler bulunabilir. Ayrıca kararlı bölgede seçilen kontrolör parametrelerinin performansa etkileri incelenebilir. İleriye yönelik olarak bu program kolay kullanımlı ve daha geniş kapsamlı hale getirilecektir.

- [1] Astrom, K. J., Hagglund, T., "The Future of PID Control," *Control Engineering Practice*, Vol. 9, 2001, 1163-1175.
- [2] Zhuang, M., Atherton, D. P., "Automatic Tuning of Optimum PID Controllers," *IEE Proc. Part D*, vol. 140, 1993, 216-224.
- [3] Astrom, K. J., Hagglund, T., *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, Instrument Society of America, 1995.
- [4] Ho, M. T., A. Data, A., Bhattacharyya, S. P., "A Linear Programming Characterization of All Atabilizing PID Controllers," *Proc. of Amer. Contr. Conf.*, 1997.
- [5] Söylemez, M. T., Munro, N., Baki, H., "Fast Calculation of Stabilizing PID Controllers," *Automatica*, vol. 39, 2003, 121-126.
- [6] Tan, N., "Computation of Stabilization Lag/Lead Controller Parameters", *Computers and Electrical Engineering*, Vol. 29, 2003, 835-849.
- [7] Tan, N., "Computation of Stabilizing PI and PID Controllers for Processes with Time Delay", *ISA Trans.*, Vol. 44, 2005, 213-223.
- [8] Tan, N., Kaya, I., Yeroglu, C., Atherton, D. P., "Computation of Stabilizing PI and PID Controllers Using the Stability Boundary Locus", *Energy Conversion and Management.*, Vol. 47, 2006, 3045-3058.
- [9] Hamamcı, S. E., Tan, N., "Design of PI Controllers for Achieving Time and Frequency Domain Specifications Simultaneously", *ISA Trans.*, Vol. 45, 2006, 529-543.
- [10] Tan, N., Atherton, D. P., "Design of Stabilizing PI and PID Controllers", *International Journal of Systems Science.*, Vol. 37, 2006, 543-554.
- [11] Ackermann, J., Kaesbauer, D., "Design of Robust PID Controllers," *European Control Conference*, pp. 522-527, 2001.
- [12] Shafiei, Z., Shenton, A. T., "Frequency Domain Design of PID Controllers for Stable and Unstable Systems with Time Delay," *Automatica*, vol. 33, 1997, 2223-2232.
- [13] Huang, Y. J., Wang, Y. J., "Robust PID Tuning Strategy for Uncertain Plants Based on the Kharitonov Theorem," *ISA Transactions*, vol. 39, 2000, 419-431.

Abdullah YENİGÜN: 1982 Mardin doğumludur. İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde 2004 yılında mezun oldu ve 2004 yılında yüksek lisans eğitimine başladı. Şu anda yüksek lisans tez aşamasında çalışmalarını sürdürmektedir. Kontrol sistemleri ve uygulanmaları ile ilgilenmektedir.

Nusret TAN: 1971 yılında Malatya Doğanşehir doğumludur. 1994 yılında Hacettepe Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. 1995 yılında İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Aynı yıl doktora eğitimi için İngiltere de Sussex Üniversitesine gitti. Doktora eğitimini 2000 yılında tamamlayarak tekrar İnönü Üniversitesine döndü. 2004 yılında doçentlik ünvanını aldı. Genel olarak kontrol sistemlerinin analizi ve tasarımıyla ilgilenmektedir.