

BELİRSİZLİK İÇEREN TEK - EKLEMLİ BİR ROBOT KOLUNUN H_∞ KONTROLÜ

Tülay AKBEY

Ahmet UÇAR

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü

Mühendislik Fakültesi

Fırat Üniversitesi, 23119, Elazığ

e-posta: takbey@firat.edu.tr

e-posta: aucar1@firat.edu.tr

Anahtar Kelimeler: Belirsizlik İçeren Sistemler, Robot Kolu, H_∞ Kontrol

ÖZET

Bu çalışmada belirsizlik içeren bir robot kolunun kontrolü yapılmıştır. Kontrolör olarak klasik ve modern kontrol tekniklerinin avantajlarını bünyesinde bulunduran H_∞ kontrolör seçilmiştir. Özellikle belirsizlik içeren sistemler için geliştirilen H_∞ kontrolör, birçok pratik problemde kullanılan ve hedeflenen duyarlılık fonksiyonunu temel olarak dizayn edilmesine olanak veren Matlab' taki Robust Control Toolbox (RCT)' u kullanılarak yapılmıştır. H_∞ kontrolörün performansı diğer optimal geri beslemeli kontrolörlerin performansı ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca H_∞ kontrolörün dizaynını kolaylaştırmak için dizayn aşamalarını esas alan ve açıkça belirten basit bir akış diyagramı verilmiştir.

1. GİRİŞ

Robotik sistemlerdeki belirsizliğe karşı dayanımlı kontrolör dizaynı önemli bir problemdir [1]. Bir robot kolunda belirsizlik genellikle kolun aldığı yükteki belirsizlik olarak tanımlanır. Robot kolunda kullanılacak kontrolörün sistemdeki yükün değişimine karşı duyarlılığının az olması istenir. Bu amaçla çeşitli gürbüz kontrolörler robot kolu için geliştirilmiştir [1]-[5].

1.1. Tek-Eklemlı Robot Kolunun Dinamiği

Viskoz sönüm katsayısı D , atalet momenti I , kütlesi M belirsizliği ΔM olan ve nonlinear terim $f(x_1) = (\Delta M + M)gl \cdot \sin x_1$ olmak üzere tek-eklemlı bir robot kolunun durum-uzay formundaki matematiksel modeli,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -D/I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I \end{bmatrix} f(x_1) \quad (1)$$

dir. Burada $I = 4Ml^2 / 3$ ve x_1, x_2 durum değişkenleri olup sırasıyla robot kolunun yatay eksenle yaptığı açısal yer değiştirme ve hızdır. Her iki durum değişkeninin çok iyi ölçüldüğü kabul edilirse sistemin çıkış denklemi,

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

dir. Denklem (1)' de verilen sistem parametreleri: $M=0.2\text{kg}$, $l=0.25\text{m}$, $D=1\text{Nsn}$, $g=9.8 \text{ m/sn}^2$ ve kütledeki değişim aralığı $0 \leq \Delta M \leq 0.3 \text{ kg}$ ' dir. Sistemdeki doğrusal olmayan eleman orijine göre doğrusallaştırılırsa, $\sin x_1 \cong x_1$ ve ΔM ' deki maksimum değer alınır, sistemin nominal modeli denklem (3)' teki gibi olur.

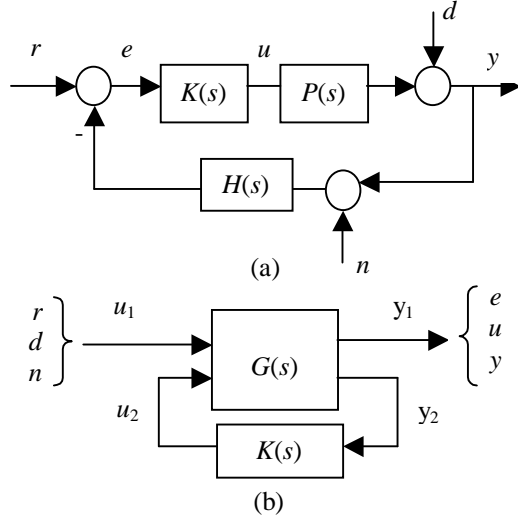
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 29.4 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

Burada kontrolör u öyle seçilmelidir ki tek-eklemlı robot kolunun kütledeki parametre değişimine karşı geri beslemeli sistem dayanımlı ve hedeflenen optimal performansları; en kısa sürede açısal pozisyon referansına sınırlı bir kontrol enerjisiyle ulaşınsın. Bu amaç için genellikle Lyapunov temelli hesaplanmış moment kontrolü yada kayma mod kontrolü dizayn edilir [6], [3]. Bunlarla beraber katsayı diyagramı temelli kontrolör de robotik sistemler için dizayn edilmektedir [5]. Bu çalışmada adaptif olarak robotik sistemler için kullanılabilir H_∞ kontrolör denklem (1)' de matematiksel modeli verilen tek-eklemlı robot kolu için dizayn edilecektir [7].

2. H_∞ KONTROL

Şekil 1. (a)' da bozucu ve gürültü etkisindeki geribeslemeli bir kontrol sistemi verilmiştir. Burada r referans, e hata, u kontrol, d bozucu ve n ise gürültü sinyalleridir. $P(s)$ sistem, $H(s)$ ölçme devresi ve $K(s)$ kontrolörün transfer fonksiyonudur. Şekil 1. (a)' da verilen sistemde r, d ve n giriş ve e, u ve y çıkış olarak alınır sistem şekil 1. (b)' deki gibi çok girişli çok çıkışlı (ÇGÇÇ) bir forma gelir. Bu formda referans girişi r , bozucu d ve sensör gürültülerini gösteren n yeni sistem girişlerinden biri olan u_1 ' i ve diğer giriş u_2 ise kontrol sinyalini göstermektedir. Şekil 1. (b)' deki y_1 kontrol edilecek sinyal/sinyalleri ve varsa durum değişkenleri üzerindeki fiziksel sınırlamaların

yapıldığı yeni çıkış değişkenidir. y_2 ise kontrolör dizaynı için gerekli olan ve ölçülebilen durum değişkenleridir.



Şekil 1: a) Bozucu ve gürültü etkisinde bir $TGTC$ geri beslemeli kontrol sistemi, b) (a) şeklindeki sistemin H_∞ kontrolör için standart formu.

Burada $H(s)=1$ olarak alınırsa her bir çıkışın girişe göre kapalı-çevrim transfer matrisleri,

Duyarlılık fonksiyonu;

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = S(s) = (I + P(s)K(s))^{-1} \quad (4)$$

Tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu;

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = P(s)K(s)(I + P(s)K(s))^{-1} \quad (5)$$

Genel adı yok;

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = K(s)(I + P(s)K(s))^{-1} \quad (6)$$

dir. Kontrolör, şekil 2' de verilen $S(s)$ duyarlılık ve $T(s)$ tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonları temel alınarak hedeflenen performansı sağlamak için y_1 üzerinde tanımlanan ağırlık fonksiyonlarının tanımlanmasıyla dizayn edilir.

Şekil 1. (b)' deki $G(s)$ genelleştirilmiş sistemin (2,2)' lik bir transfer matrisi ve $K(s)$ ise dizayn edilecek kontrolördür. Bu durumda şekil 1. (b)' deki sistem için çıkışlar-girişler transfer fonksiyonu denklem (7)' deki gibi tanımlanmıştır [8].

$$\begin{aligned} y_1 &= G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ y_2 &= G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \\ u_2 &= K(s)y_2 \end{aligned} \quad (7)$$

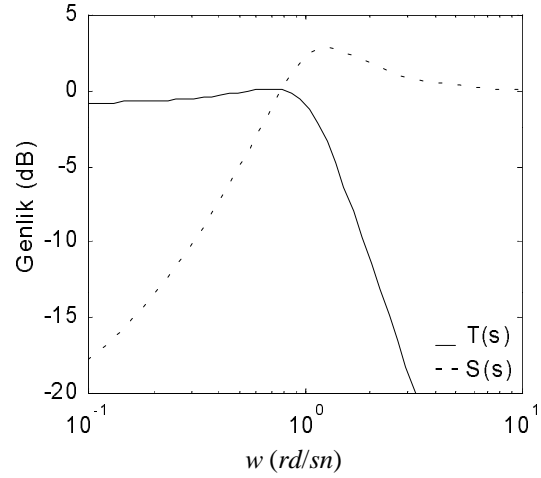
Hedeflenen performansı sağlayacak şekilde regüle edilmiş y_1 çıkışı ile sistem girişi u_1 arasındaki kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

$$T_{y_1 u_1} = G_{11}(s) + \frac{G_{12}(s)}{(I - K(s)G_{22}(s))} K(s)G_{21}(s) \quad (8)$$

dir. Burda hedef, $\gamma > 0$ küçük skaler bir değer olmak üzere $K(s)$ kontrolörü öyle dizayn edilmelidir ki kapalı çevrimli sistem kararlı olsun ve kapalı çevrim transfer fonksiyonunun H_∞ normu,

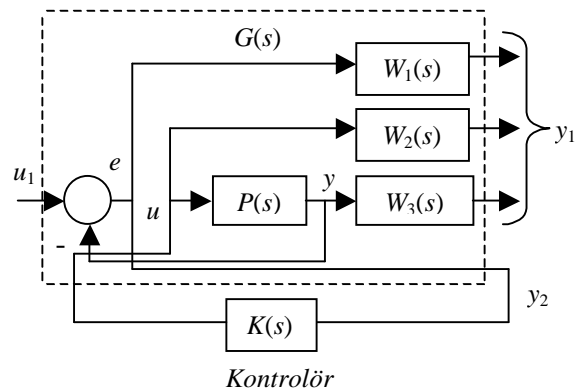
$$\|\gamma^{-1} T_{y_1 u_1}\|_\infty \leq 1 \quad (9)$$

eşitliğini sağlasın. Bunu sağlamak için [9]' da önerilen, bir uydu sisteminin yörünge kontrolünde kullanılan, sadece Matlab RCT^* ye [10] gereksinim duyan ve literatürde *Mixed-Sensitivity Approach* olarak anılan şekil 3' teki teknik kullanılacaktır.



Şekil 2: Tipik duyarlılık ve tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonları.

Şekil 3' teki sistemde regüle edilen çıkış y_1 ile sistem girişi u_1 arasındaki denklem (8)' de verilen kapalı çevrim transfer fonksiyonu $T_{y_1 u_1}$ şimdi



Şekil 3: Mixed-sensitivity tekniğinin blok diyagramı.

$$T_{y_1 u_1} = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix} \quad (10)$$

olarak W_1 , W_2 ve W_3 ağırlık fonksiyonları ve $|S| \leq W_1^{-1}$, $|KS| \leq W_2^{-1}$, $|T| \leq W_3^{-1}$ ile sınırlandırılmış bir forma gelir. Burada hedef: şekil 2' yi kullanarak e hata sinyalini sınırlayan W_1 , u kontrol sinyalini sınırlayan W_2 ve y çıkış sinyalini sınırlayan W_3 ' ün denklem (9)' da ki şartı sağlayacak şekilde seçmektir. Seçilen ağırlık fonksiyonları ile sistemin bileşiminden oluşan ve şekil 1. (b)' de verilen sistemin genelleştirilmiş transfer matrisinin RCT ' nin kullanımına olanak sağlayan formu,

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

biçiminde olur.

2.1. Ağırlık Fonksiyonlarının Seçimi

Yukarıda belirtilen W_1 , W_2 ve W_3 ağırlık fonksiyonları, [11]' de önerilen ve yukarıda bölüm 1.1' de matematiksel modeli verilen tek-eklemli robot kolunda istenilen performansa uygun seçilecektir. Ancak bu ağırlık fonksiyonlarının genel olarak nasıl seçileceğini [8]-[11] referansları kullanılarak önce verilecek ve dizayn için basit bir akış diyagramı önerilecektir.

$W_1(s)$ ağırlık fonksiyonu: $W_1(s)$, şekil 2' den çizilen $S(s)$ duyarlılık fonksiyonundan yararlanarak bozucunun etkin olduğu frekansta etkisini azaltmak üzere ve $|S| \leq W_1^{-1}$ sağlayacak şekilde aşağıdaki değerler $S(s)$ ' ten okunarak seçilir. Bu yüzden,

1. Hedeflenen $S(s)$ ' te ω_s bant genişliği,
2. Verilen probleme göre hedeflenen sürekli-durum hatası A ,
3. Hedeflenen $S(s)$ ' in maksimum pik genliği $\|S(s)\|_\infty \leq M$.

okunur ve bu değerlere göre,

$$W_1(s) = \gamma \frac{s/M + \omega_s}{s + \omega_s A} \quad (12)$$

oluşturulur. Dikkat edilirse $1/W_1(s)$ düşük frekanslarda A ' ya, yüksek frekanslarda ise M ' e eşittir ve asimptot ω_s frekansında 0 dB' i geçen bir özelliğe sahip olduğu görülür.

$W_2(s)$ ağırlık fonksiyonu: $W_2(s)$ ağırlık fonksiyonu giriş sinyalinin türüne ve istenilen performansa göre

kontrol sinyalinin genliğini sınırlayacak şekilde seçilir. $W_2(s)$ ' in çok geniş seçilmesi kontrol işaretini çok iyi sınırlar. Ancak kapalı çevrim transfer fonksiyonu $T(s)$ ' in bant genişliğini azaltır. Bu nedenle kontrol işaretinin fiziksel sınırları göz önünde bulundurularak uygun bir $W_2(s)$ seçilir [11].

$W_3(s)$ ağırlık fonksiyonu: Hedeflenen kapalı çevrim transfer fonksiyonun özelliklerine göre $W_3(s)$ ağırlık fonksiyonunun genlik geçiş frekansındaki eğim (roll-off rate) 20-40 dB/dec olacak şekilde seçilir. Yapısal olarak $W_3(s)$ genellikle uygun olmayan bir transfer fonksiyonudur. Fakat $W_3(s)G(s)$ ise uygun transfer fonksiyonu olduğundan dolayı fiziksel olarak gerçekleştirilmesi ve Matlab' ta durum-uzay formunda tanımlanması mümkündür. Böylece genelleştirilmiş transfer matrisi $G(s)$ ' teki D_{12} alt matrisinin full rank olma şartı da sağlanmış olur [9].

2.2. Dizayn Şeması

Şekil 4' te genel amaçlı bir H_∞ kontrolör dizayn akış şeması verilmiştir. Bu akış şeması RCT ' de bulunan sırasıyla $mksys.m$, $augtf.m$, $hinftopt.m$ ve $branch.m$ komutları kullanılarak yapılmıştır. Her bir bloktaki işlem akış diyagramında belirtilmiş, fakat kullanılan robot kolunun özelliğinden dolayı 3. bloktaki bilgilere ve bölüm 2.1' deki kriterlere ek olarak $W_3(s)$, özel bir durum olan robot kolu modelinin nominal kısmı $P(s)$ ' in sağ yarı s-düzlemindeki kutba göre [11]' de belirtilen yöntem kullanılarak seçilmiştir. Denklem (3)' te verilen sistem $p = 1.1681$ ' de reel bir kutba sahiptir ve M_T hedeflenen $T(s)$ ' in maksimum pik değeri olmak üzere $W_3(s)$;

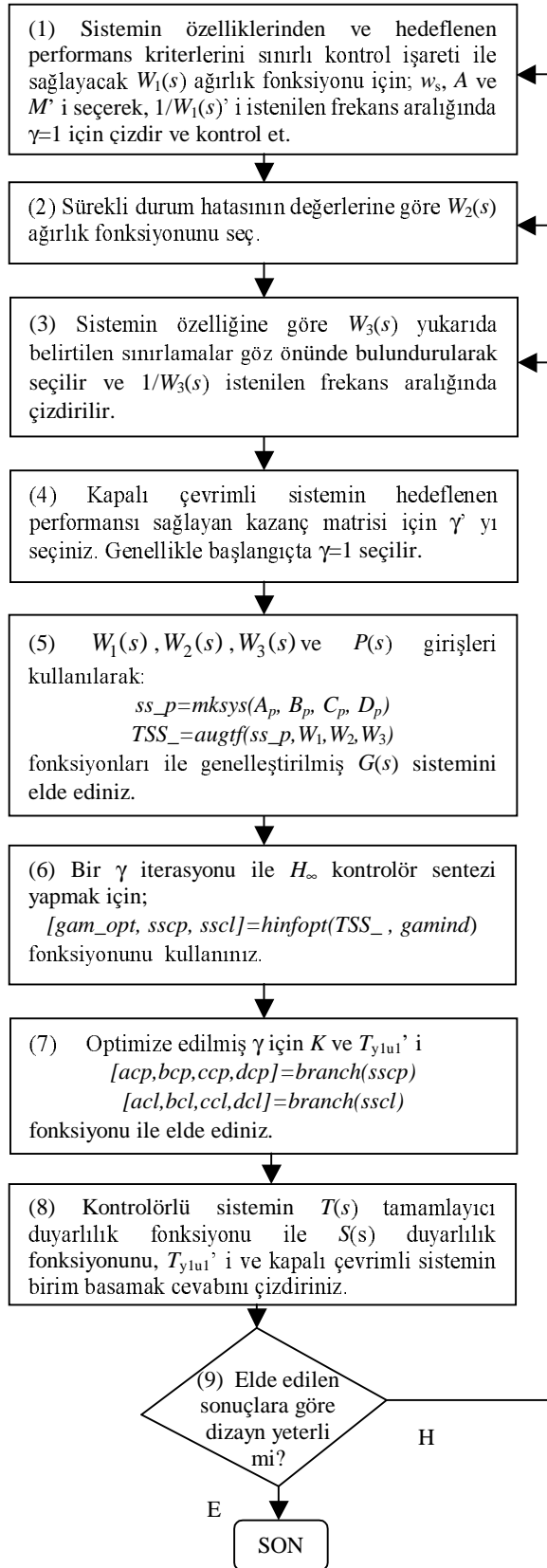
$$W_3(s) = \frac{s}{\omega_T} + \frac{1}{M_T} \quad (13)$$

dir. Burada ω_T hedeflenen $T(s)$ ' in bant genişliğidir ve

$$\omega_T > p \frac{M_T}{M_T - 1} \quad (14)$$

sağlaması gerekir [11].

Denklem (3)' te verilen sistem ile denklem (2)' deki sistem çıkışı $mksys$ komutu kullanılarak uygun bir değişken oluşturulur. Bu değişkenle ağırlık fonksiyonları W_1 , W_2 ve W_3 ' ün bileşiminden elde edilen denklem (11)' deki form $augtf$ komutu ile elde edilir. Kontrolör, seçilen performansa göre $hinftopt$ komutu kullanılarak uygun $gamind$ girişi ile optimal olarak dizayn edilir. Şekil 4' teki şemada verilen 7. adımda γ , kontrolör $K(s)$ ve $T_{y_1 u_1}$ gözlenir. 8. adımda da kapalı çevrimli sistemin performansı incelenir.



Şekil 4: H_∞ kontrolör dizaynı için basit bir akış diyagramı.

Dizaynın yeterli olup olmadığına ise 9. adımda karar verilerek uygunsa kontrolörün dizayn işlemine son

verilir. Uygun değilse uygun olmayan duruma ait ağırlık fonksiyonu üzerindeki parametreler maniple edilerek dizayn işlemi tekrarlanır.

2.3. Kontrolör Dizaynı

Denklem (3)' te verilen tek-eklemlili robot kolunun birim geri beslemeli duyarlılık fonksiyonu

$$S(s) = \frac{s^2 + 24s - 29.4}{s^2 + 48s - 5.4} \quad (15)$$

dir ve şekil 2' de olduğu gibi tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu ile çizdirilerek $S(s)$ ' in bant genişliği 1.28 rad/sn ve maksimum pik değeri ise $\|S\|_\infty = 5.4442$ olduğu görülebilir. Hedeflenen performans kriterleri $\omega_s = 1.2$ rad/sn, sürekli durum hatası $A = 1e-5$ ve maksimum pik genliği $M = 6$ olarak seçilirse, bölüm 2.1' de tanımlanan $W_1(s)$ ağırlık fonksiyonu,

$$W_1(s) = \gamma \frac{s/6 + 1.2}{s + 1.2 \times 10^{-5}} \quad (16)$$

dir. Bölüm 2.2' deki kriterlere göre $M_T = 2$ ve $\omega_T > p$ şartı göz önünde bulundurularak $\omega_T = 3$ seçilirse denklem (13)' te tanımlanan $W_3(s)$ ağırlık fonksiyonu,

$$W_3(s) = \frac{2s + 3}{6} \quad (17)$$

dir. Kontrolör genliğindeki sınırlama $W_2(s) = 10^{-7}$ ve $\gamma = 1$ seçilirse şekil 4' teki akış diyagramında verilen dizayn prosedürü gereği hesaplanan kontrolöre göre elde edilen $S(s)$ $W_1^{-1}(s)$ ile ve $T(s)$ $W_3^{-1}(s)$ ile karşılaştırılarak 9. aşamada verilen dizayn kriterlerine göre uygunluk için karar verilir. Burada $\gamma = 0.3$ için uygun olduğu görüldü ve buna ilişkin kontrolör $K(s)$ ve optimal γ ,

$$K(s) = 368.6 \frac{s^2 + 25.3277s + 3.961}{s^3 + 29575s^2 + 2956s + 0.03547} \quad (18)$$

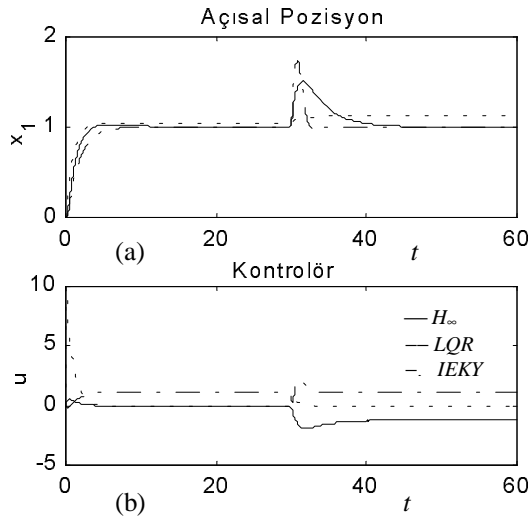
$$\gamma = 0.291 \leq 1$$

dir. Denklem (3)' te verilen sistem için dizayn edilen H_∞ kontrolörün performansı İntegral Etkin Kutup Yerleştirme (IEKY) ve Linear Quadratik Regulator (LQR) teknikleriyle karşılaştırılmıştır. Hedeflenen öz değerler $-1.4 \pm j1.4283$ ve -5 olarak seçilir ve denklem (3)' te verilen sisteme IEKY tekniği uygulanırsa, o zaman durum geri besleme kazanç vektörü $K = [1.1417 \quad -0.6750]$ ve integral kazanç sabiti $k_i = 0.8333$ olarak bulunur [12]. LQR kontrolörde $Q = [1 \ 0; 1 \ 0]$ ve $R = [0.01]$ için kazanç vektörü $K = [11.3 \quad 9.1]$ ' dir [12].

3. SONUÇ ve TARTIŞMA

H_∞ performansının şekil 1. (a)' da verilen sistemler için iyi olduğu teorik ve pratik olarak ispatlanmakta ve birçok endüstriyel sisteme uygulanmaktadır. Ancak burada parametre belirsizliği $0 \leq \Delta M \leq 0.3$ içeren bir robot kolundaki ΔM değişimine göre $\Delta M = 0.3$ alınarak dizayn edilen H_∞ kontrolörün birim basamak girişe karşılık performansı LQR ve $IEKY$ ile karşılaştırılmıştır. Şekil 5. (a)' da $0 < t < 30$ zaman aralığında $\Delta M = 0$ ve $t = 30$ ' da $\Delta M = 0.3$ alınarak açıl pozisyon her üç kontrolör için verilmiştir. Şekil 5. (a)' daki H_∞ kontrolör parametre değişimine karşı birim basamak değerine her iki zaman aralığında da ulaşmaktadır. Ancak LQR kontrolör $0 < t < 30$ ' da $|e| = 0.045$ ' lik bir hatayla referans girişini takip etmektedir. $t \gg 30$ ' da ise bu hata daha da artarak 0.1216' lik sürekli bir hatayla giriş işaretini takip eder. $IEKY$ kontrolörü ise $0 < t < 30$ aralığında sürekli duruma erişir. Fakat $t > 30$ aralığında geçici rejimde H_∞ ' den daha büyük bir genlik değerine ulaşarak osilasyonlu bir davranış gösterir.

Şekil 5. (b)' de kontrolör çıkışı karşılaştırıldığında H_∞ kontrolörün genliğinin uygun olduğu görülmektedir. Her ne kadar $IEKY$ kontrolörün genliği düşük gözüksede bu ileri yöndeki integralin etkinliğinden dolayıdır. Eğer dizayn sadece kutup yerleştirme ile yapılmış olsaydı kontrolör genliği hedeflenen performansı sağlamak için oldukça büyük olacak ve sistemi süren birimin saturasyonda çalışmasına sebep olacaktı.



Şekil 5: (a) Açıl pozisyon x_1 ' in zamana göre değişimi, (b) Kontrolör çıkışı u ' nun zamana göre değişimi.

Dolayısıyla sistem istenmeyen osilasyon moduna ulaşacak, doğrusal olmayan duruma gelecektir. Ancak bilindiği gibi $IEKY$ ' de ÇGÇÇ sistemler için dizayn işlemi oldukça problemlidir. Halbuki H_∞ kontrolör,

şekil 4' te verilen dizayn aşamaları hemen hemen aynı kalarak daha basit bir şekilde dizayn edilebilir.

H_∞ kontrolörün performansı denklem (1)' de verilen sistem modelindeki nonlineer, şekil 1. (a)' da verilen bozucu d ve gürültü n ' e göre etkin olduğu görülebilir.

Sonuç olarak bu çalışmada RCT ' de verilen H_∞ kontrolör dizaynı için hedeflenen ağırlık fonsiyonlarını temel alan bir dizayn akış diyagramı gerçekleştirilmiştir. Bu diyagramdaki komutların işleyişi ve sınırlamaları RCT ' de verilmiştir. Özellikle kararsız bir sistem modeli seçilerek dizayn yapılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Asada H. and Slotine J.J.E. *Robot Analysis and Control*; New York:Wiley, 1986.
- [2] Lewis F.L., Abdullah C.T., Dawson D. *Control of Robot Manipulators*. Maxwell-Macmillian: New-York, 1993.
- [3] Danker A. and Kaynak O. Applications of VSC in Motion Control System. Springer-Verlag: *in Variable Structure and Lyapunov Control*, (Ed. A. S. I. Zinobr), 1994; 364-387.
- [4] Ucar A. *A sliding mode controller/observer pair for rigid robot manipulators*; Leicester University, 1995.
- [5] Ucar A., Hamamcı S.E. A controller based on Coffecient Diagram Method for the robotic manipulators. *The 7 IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems*, 2000; 777-780.
- [6] Slotine J.J.E., Li W. *Applied Nonlinear Control*; Prentice-Hall: New Jersey, 1991.
- [7] Feng W. and Poslethwaite I. Robust non-linear H_∞ /adaptive control of robot manipulator motion. *Proc Instn Mech Engrs* 1994; **28**: 221-230.
- [8] Francis B.A., *A course in H_∞ control theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 88, 1987.
- [9] Skullestad Aa. and Gilbert J.M. H_∞ control of gravity gradient stabilised satellite. *Control Engineering Practice* 8 2000; 975-983.
- [10] The MathWorks, Inch, Robust Control Toolbox, 1996.
- [11] Skogestad S. and Poslethwaite I. *Multivariable Feedback Control Analysis and Design*; New York: Wiley, 1996.
- [12] Ogata K. *Modern Control Engineering*; Prentice Hall, 1990.