

# Boolean Rasgele Kümelerin Morfolojik Kesikli Büyüklük Dağılımıyla Modellenmesi

Tansu Küçüköncü<sup>1</sup>, Ömer L. Gebizlioğlu<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Danışman, Eskişehir

<sup>2</sup>İstatistik Bölümü, Ankara Üniversitesi, Ankara

e-posta : <sup>1</sup>Tansu.Kucukoncu@gmail.com , <sup>2</sup>Omer.L.Gebizlioglu@ankara.edu.tr

## Özetçe

Bu çalışmada, düzgün sınırlı kesikli Boolean (Boole) rasgele kümeler (DSKBRK), kesikli büyüklük dağılımıyla modellenmiştir. Boolean model parametresi olarak büyüklük ölçüleri, şekil büyüklüğü dağılımı, yoğunluğu, spektrumu, ve beklenen değeri kullanılmıştır. Boolean model parametreleri, DSKBRK görüntülerinin morfolojik eleklenden geçirilerek elde edilen verilerle, deneysel tahmin edici yöntemi, ve Monte Carlo tahmin edici yöntemi kullanılarak tahmin edilmiştir. Monte Carlo yönteminde Boolean Rasgele Kümelerin benzetişimi, iki boyutlu Poisson benzetişim yöntemi ile yapılmıştır. Morfolojik elekler, aşınma ve genişleme kombinasyonları olan açılış ve kapanış işlemleridir

## 1. Giriş

Bu çalışmanın amacı, DSKBRK'lerin, kesikli büyüklük dağılımıyla modellenmesidir; bütün halinde yöntem DSKBRK'ler için ilk kez önerilmiş ve gerçekleştirilmiştir. Problem ve önerilen çözüm, iki bileşenden oluşmaktadır. Birinci bileşen, problemin tanımlandığı *Rasgele Kümeler Kuramı*dır. Modellenmesi hedeflenen *Boolean (Boole) Rasgele Kümeler*, bu kuramın bir alt kümesidir. İkinci bileşen, görüntü verilerinden Boolean rasgele kümelerin elde edilmesi için işlemler sağlayan *Matematiksel Morfolojidir (Biçimbilim)*. Her iki bileşen de istatistik, matematik, elektronik mühendisliği, bilgisayar mühendisliği, ve bilişsel bilimlerin çalışma konuları arasındadır ve geniş bir yelpazede uygulama alanına sahiptir.

## 2. Rasgele Kümeler

O, L, ve K,  $R^d$  Öklid uzayının açık, kapalı, ve kompakt alt kümeleri olan uzaylar olsun,  $K_{ix}$  ise  $R^d$  'nin topolojik olarak tüm kapalı alt kümelerinin bir uzayı olsun. Bir *rasgele kapalı küme*, kısaca *rasgele küme*,  $X : \Omega \rightarrow P$ , bir  $(\Omega, \Sigma(\Omega), P)$  *olasılık uzayından*  $(L, \Sigma(L))$  *ölçülebilir uzayına* bir *ölçülebilir eşleştirmedir (ilişkilendirme)*. Bir X rasgele kümesi,  $\Sigma(L)$  üzerinde bir biricik  $P_L$  olasılığı üretir [14, 15, 25, 26]. Tüm kompakt (kapalı ve sınırlı) kümeler için, ölçülebilirlik,  $\{w : X(w) \cap K_{ix} \neq \emptyset\} \in \Sigma$ , olması nedeniyle garantilenir [15]. Bu, X'in bir gerçekleşimi gözlemlendiğinde, her zaman, X'in bir  $K_{ix}$  kompakt kümesinin içinde ya da dışında olduğunun söylenebileceği anlamına gelir. Burada X, değerleri kapalı kümeler olan bir fonksiyondur.

### 2.1. Boolean modeller

Çakışan tanecik sistemlerinin bu en çok kullanılan modeli aşağıdaki şekilde tanımlanabilir : İlk olarak b.b.d.  $D_0, D_1, D_2, \dots$  rasgele kümelerini ele alalım. Ardından  $R^d$  'deki  $\lambda$  yoğunluğuna sahip  $\prod_{\lambda} = \{x_i, i \geq 1\}$  Poisson nokta süreci düşünelim. Son

olarak, her  $D_i$  'yi ilgili  $x_i$  noktasına yerleştirip, birleşimlerini alalım:

$$D = \bigcup_{i: x_i \in \prod_{\lambda}} (D_i + x_i) \quad (1)$$

Bu küme, *Boolean (Boole) modeli* olarak adlandırılır [15, 19].  $x_i$  noktaları *tohum*,  $D_0$  rasgele kümesi tipik *tanecik* olarak adlandırılır. Boolean rasgele kümelerin, basit bir rasgele şekli (küme); rasgele büyüklükte bir disk gibi), düzlemdeki noktaların Poisson alanının noktalarını merkez olacak şekilde yerleştirilip, ardından ortaya çıkan kümelerin birleşimini alarak elde edildiği söylenebilir. Poisson alanının farklı noktalarını merkez alan rasgele şekillerin bağımsız ve istatistiksel olarak eşit oldukları kabul edilir [22]. Bir bakıma, Boolean modelin, "beyaz gürültü"nün, bir rasgele şekil oluşturan doğal bir gerçekleşimi olarak görülebilir.

Eğer  $M \subseteq M' \rightarrow C(M) \leq C(M')$ ,  $M_n \uparrow M \rightarrow C(M_n) \uparrow C(M)$ , ve  $K_n$  ile  $K_{ix}$  kompakt kümeler olmak üzere,  $K_n \downarrow K_{ix} \rightarrow C(K_n) \downarrow C(K_{ix})$  ise,  $C : P \rightarrow [-\infty, \infty]$  şeklindeki bir eşleştirme, *sığa* olarak adlandırılır. Bir X rasgele kümesinin,  $R^d$  'deki K kompakt kümeler ailesinin bir üyesi olan  $K_{ix}$  'e isabet etme olasılığı

$$T(K_{ix}) = T_X(K_{ix}) = P\{X \cap K_{ix} \neq \emptyset\}, \quad K_{ix} \in K \quad (2)$$

olarak tanımlanır. Bu  $T : K \rightarrow [0, 1]$  fonksiyoneli, X'in *sığa fonksiyoneli* olarak adlandırılır. Sığa fonksiyoneli, bir rasgele kapalı kümenin dağılımını biricik olarak belirler.  $T : K \rightarrow [0, 1]$  olsun. Sadece ve sadece T'nin bazı koşullarını sağlaması durumunda,  $P\{X \cap K_{ix} \neq \emptyset\} = T$  olacak şekilde,  $R^d$  'de T sığa fonksiyoneline (veya ilişkili  $\sigma$ -cebri üzerinde biricik olasılığa) sahip bir biricik rasgele küme vardır (Choquet teoremi) [3, 8, 15, 19].

## 3. İki-değerlikli Temel Morfolojik İşlemler

Metamatematiksel morfoloji (biçimbilim), iki değerlikli ve gri seviyeli görüntülerden geometrik bilgi çıkartan bir araçtır. Bir görüntü işleci elde etmek için *yapıtışı elemanı* olarak bilinen bir şekil *göstergeci* kullanılır. Görüntü işlecinin çıktısı, bu göstergenin verilen görüntüyle örtüşüp örtüşmediğine bağlıdır. Çıkarılan bilginin kullanılan göstergenin şekline ve büyüklüğüne bağlı olacaktır.

### 3.1. Aşınma ve Genişleme

Aşınma ve genişleme, matematiksel morfolojinin en temel işlemleridir.  $F_1$  ve  $F_2$ , birer küme olmak üzere, her  $(F_1, F_2)$  iki-değerlikli görüntü ikilisi için, ötelenmeden etkilenmeyen her *aşınma*,  $\varepsilon$ , ve her *genişleme*,  $\delta$ , aşağıdaki şekillerde ifade edilir :

$$\varepsilon(F) = \bigcap_{b \in B} F - b = F \ominus B \quad (3)$$

$$\delta(F) = \bigcup_{b \in B} F + b = F \oplus B \quad (4)$$

burada B, bir yapıtaşı elemanıdır (bkz. Şekil 2).

Matematiksel morfolojinin temel önermesi *Matheron gösterimidir*. Ötelenmeden etkilenmeyen, ve artan her küme işleci aşınmaların bir birleşimi ya da genişlemelerin bir kesişimi olarak ifade edilebilir. Tam tersi de geçerlidir; bir işleç (filtre veya küme eşleştirmesi), W, sadece ve sadece çekirdek elemanlarının aşınmalarının birleşimi (veya genişlemelerinin kesişimi) olarak gösterilebiliyorsa ötelenmeden etkilenmeyen ve artandır [15, 25].

### 3.2. Açılış ve Kapama

$F \circ B = (F \ominus B) \oplus B$  birleşimi *açılış* (veya *morfolojik açılış*),  $\alpha$ ,  $F \bullet B = (F \oplus B) \ominus B$  birleşimi *kapama* (veya *morfolojik kapama*),  $\kappa$ , olarak adlandırılır [15, 25].

Bir F şeklini bir B yapıtaşı elemanı ile açmak F'nin B'den küçük tüm bileşenlerini çıkarır. Açma işleminden sonra F'nin B'nin herhangi bir ötelenmiş yansımasını içeren bir bileşeni kalmaz. Böylece, açma işleci, bir *düzleyici filtre* gibi davranır. Düzlemenin miktarı ve tipi, kullanılan yapıtaşı elemanın şekli ve büyüklüğü tarafından belirlenir. Bir F şeklini bir B yapıtaşı elemanı ile kapamak F<sup>c</sup>'nin B 'den küçük tüm bileşenlerini çıkarır. Kapama işleminden sonra F<sup>c</sup>'nin B 'nin herhangi bir ötelenmiş yansımasını içeren bir bileşeni kalmaz [6, 15, 25].

### 4. Büyüklük Dağılımının Ölçülmesi

Kendall and Moran [9] (parçacıkların büyüklük dağılımı), Underwood [32] (büyüklük dağılımı), ve Santalo'nun [24] (parçacıkların büyüklük dağılımının, parçacıkların bölümlerinin büyüklük dağılımlarından türetilmesi), ve Norberg'in [21] çalışmaları, büyüklük dağılımının ölçülmesi için yapılan başlıca öncül çalışmalardır.

Büyüklük dağılımının ölçülebilmesi için kullanılacak en temel yaklaşımlardan birisi, deneysel tahmin edicilerden yararlanmaktır. Deneysel tahmin ediciler, büyüklük dağılımının, görüntünün içerdiği şekillerin büyüklüklerinin, seçilen referans yaklaşımına göre, tek tek ölçülerek belirlenmesine dayanır. Gözlem penceresi sınırlı olduğu için, pencerenin boyutları küçüldükçe hata payı artmaktadır. Genel bir kural olarak, büyüklük dağılımının iyi tahminleri, sadece *küçük büyüklüklerde* alınabilir. Bu problemi aşmak için, elimizdeki görüntü, sonlu bir gözlem penceresinden izlenen bir durağan rasgele küme gerçeklenimi olarak kabul edilir. Deneysel tahmin edici, doğal olarak yansızdır, ve uygun kovaryans kabulleri altında, gözlem penceresi limitte sonsuza doğru büyüdükçe, *tutarlıdır*. Bununla birlikte, uygulamada gözlem penceresinin büyüklüğü sabittir. Dolayısıyla, deneysel tahmin edicinin ortalama karelendirilmiş hatası üzerinde fazla kontrolümüz yoktur [12, 13, 16, 17, 18, 19, 27].

Büyüklük dağılımının belirlenebilmesinde, Monte Carlo yöntemine dayalı yaklaşımların hata payının azaltılabilmesi kolay olduğu için, etkilidirler. Bu tür yaklaşımların tutarlılığı, sadece Monte Carlo işlemlerinin tekrarlanma sayısı ile doğru orantılıdır; gözlem penceresinin büyüklüğünden bağımsızdır. Gerçekleştirilen Monte Carlo işlemleri, elde edilen görüntülerden elde edilen bilgilerin kullanımıyla başlayarak, belirli kurallar çerçevesinde, aynı dağılıma sahip yeni görüntüler, yani aynı dağılıma sahip yeni örnekler, elde edilmesine dayanır. Ortaya çıkan her yeni görüntünün dağılımın belirlenmesi işlemi yeni baştan yapılır. Aslıyla birlikte türetilmiş bütün görüntülerden elde edilen bilgilerin bir arada değerlendirilmesiyle, ilk görüntüye ait büyük dağılımı ve büyüklük yoğunluğunun daha gerçekçi ve daha tutarlı bir şekilde elde edilebilmesi mümkün olur [5, 23]. Monte Carlo

tahmin edicilerinin büyüklük dağılımı ve ilişkili büyüklük yoğunluğunu belirlemede kullanılabileceği ilk olarak Moore and Archambault [20] ve Sivakumar and Goutsias [29] tarafından önerilmiştir. Yansız ve tutarlı tahmin ediciler ele alınmıştır.

Bu konunun gerçek yaşam problemlerine uygulanması için büyüklük dağılımının uygun bir şekilde hesaplanabilir olması gerekir. Bir çok rasgele küme modeli için, büyüklük dağılımının analitik olarak hesaplanması olanaklı değildir [15]. Bu uygulamada bir kesikli rasgele kümenin şekil (tanecik) yarıçapı (dolayısıyla şekil alanı), (kesikli) büyüklük dağılımı ve yoğunluğu, rasgele kümeyi modelleyici başlıca etmen olarak kullanılmıştır. Bunun için *deneysel rasgele tahmin edici* ve *Monte Carlo tahmin edicisinden* yararlanılmıştır ve elde edilen sonuçlar birbiriyle karşılaştırılmıştır.

### 4.1. Bir deneysel büyüklük dağılımı tahmin edicisi

F, Z<sup>2</sup> üzerinde bir kesikli rasgele küme, ve M<sub>s</sub>, Z<sup>2</sup>'deki tüm eşleştirmelerin kümesi P 'den kendisine bir morfolojik görüntü işleci olsun. Örneğin, s=0,1,... olmak üzere, M<sub>s</sub> = A<sub>s</sub>, P üzerinde bir granülometri, ya da M<sub>s</sub> = K<sub>s</sub>, P üzerinde bir karşı-granülometri olarak seçilebilir.

F'nin bir artan W<sub>1</sub> ⊂ W<sub>2</sub> ⊂ ... ⊂ W<sub>m</sub> ⊂ ... ⊂ Z<sup>2</sup> sınırlı pencereler zincirinden izlendiği varsayalım. Bu durumda gözlemler, X ⊂ W<sub>m</sub>, m = 1, 2, ..., gerçeklenimleri olacaktır. W<sub>m</sub><sup>1</sup>(s) ⊆ W<sub>m</sub>, en büyük boş olmayan alt pencere olsun (öyle bir pencerenin varlığını varsayarak)

$$M_s(F) \cap W_m^1(s) = M_s(F \cap W_m) \cap W_m^1(s), \quad \forall F \in \mathcal{P} \quad (5)$$

$$\Delta_F(s, W; M) = \frac{1}{|W_m^1(s)|^2} |M_s(F \cap W_m) \cap W_m^1(s)|$$

$$= \frac{1}{|W_m^1(s)|^2} |M_s(F) \cap W_m^1(s)| \quad (6)$$

morfolojik istatistiğini ele alalım. Bu istatistiğin, Δ<sub>F</sub>(s, W<sub>m</sub>; M<sub>s</sub>), R<sup>2</sup>'deki rasgele kapalı kümeler için m→∞ limitinde hemen hemen (h.h.) yakınsaması Moore and Archambault [20], Z<sup>2</sup>'deki yakınsaması Sivakumar and Goutsias [31] tarafından ele alınmıştır.

Bir F kesikli rasgele kümesi, eğer E[[M(F)](w)], w ∈ Z<sup>2</sup>'den bağımsızsa, bir M<sub>s</sub> : P → P morfolojik işlecine göre birinci dereceden *durağandır*. Eğer F kesikli rasgele kümesi, bir M<sub>s</sub> : P → P morfolojik işlecine göre birinci dereceden *durağansa*,

$$E[\Delta_F(s, W_m; M_s)] = E[[M(F)](0)] = e_s, \quad \forall m \geq 1 \quad (7)$$

$$\text{ve} \quad (8)$$

$$\text{Var}[\Delta_F(s, W_m; M_s)]$$

$$= \frac{1}{|W_m^1(s)|^2} \sum_{v, w \in W_m^1(s)} E[[M_s(F)](v) [M_s(F)](w)] - e_s^2$$

'dir. Burada 0 = {(0, 0)} 'dir. Eğer F, bir M : P → P morfolojik işlecine göre birinci dereceden *durağansa*, ve c<sub>s</sub>(v, w) : Z<sup>2</sup> × Z<sup>2</sup> → R, aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyonsa

$$E[[M_s(F)](v) [M_s(F)](w)] \leq c_s(v, w) + e_s^2, \quad \forall v, w, \in Z^2$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{|W_m^1(s)|^2} \sum_{v, w \in W_m^1(s)} c_s(v, w) = 0 \quad (10)$$

'dir. m→+∞, Δ<sub>X</sub>(s, W<sub>m</sub>; M<sub>s</sub>) olasılıkta e<sub>s</sub>'ye yakınsar.

Bunun ötesinde, c<sub>s</sub>(v, w), a ve b pozitif sonlu sayılar olmak üzere, aşağıdaki özelliği sağlıyorsa,

$$\frac{1}{|W_m(s)|^2} \sum_{v,w \in W_m^1(s)} \sum c_s(v, w) \leq \frac{a}{|W_m^1(s)|^b} \quad (11)$$

ve eğer  $K$  bir pozitif sonlu sayı, ve  $O(k)$ ,  $k \rightarrow \infty$  iken  $|\frac{O(k)}{k}| \rightarrow c < \infty$  olmak üzere  $|W_m^1(s)| = Kk^2 + O(k)$  ise  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_X(s, W_m; M)$  h.h.

$= e_s$  'dir.  $F$ 'nin  $M$ 'ye göre birinci dereceden kesikli rasgele küme olması ve (9) ve (10) koşullarını sağlaması halinde (7) ve (8) 'den  $\Delta_X(s, W_m; M)$  'nin  $e_s$  için yansız, ve  $k \rightarrow \infty$  iken tutarlı bir tahmin edici olduğu açıktır.

Eğer  $F$ , durağan bir kesikli rasgele küme, ve  $M_s$  ötelenmeden etkilenmeyense (çalışmamızda ele alınan granülometri ve karşı-granülometreler için geçerli olan durum),  $F$ ,  $M_s$ 'ye göre birinci dereceden durağandır, ve deneysel tahmin edici

$$\hat{S}_F(s, W_m) = \begin{cases} \Delta_F(s, W_m; G_s(F)), & s \geq 0 \\ \Delta_F(|s|, W_m; J_s(F)), & s \leq -1 \end{cases} \quad (12)$$

$S_X(s)$  büyüklük dağılımının, her  $m \geq 1$  için yansız, ve  $m \rightarrow \infty$  iken tutarlı bir tahmin edicisi olacaktır. Uygun  $M_s$ 'nin seçilebilmesi için (9) ve (10)'daki koşulların sağlanması gerekir. Buna ek olarak, deneysel tahmin edici,

$$\hat{S}_F(s, W_m) = \hat{S}_F(s, W_m) - \hat{S}_F(s+1, W_m) \quad (13)$$

$s_F(s)$  büyüklük dağılımının, her iki  $s$  ve  $s+1$  büyüklükleri için, her  $m \geq 1$  için yansız, ve  $m \rightarrow +\infty$  iken tutarlı bir tahmin edicisi olacaktır [28, 30, 31]. Uygulamada bu koşulların doğrulanması güçtür. Yapılabildiği bir kaç örnek için [20]'ye bakılabilir.

Önceki sonuçlar, bu  $\hat{S}_F$  ve  $\hat{S}_F$  tahmin edicilerinin, sadece, veriler yeterince büyük pencerelerden gözlemlendiğinde güvenilir olduklarına işaret etmektedir. Uygulamada, gözlem penceresi sabit olduğu için bu  $\hat{S}_F$  ve  $\hat{S}_F$  tahmin edicilerinin  $|s|$  'nin büyük değerleri için güvenilir olması beklenmez.

Belli  $P$  stokastik süreçleri için  $S_F$  ve  $s_F$ ,  $P$ 'nin ürettiği bir  $F$  görüntüsünün morfolojik işlemlerle işlendikten sonra verilen bir noktayı içermesinin olasılık tahmini olarak kabul edilebilir.  $P$  stokastik süreci altında  $F$  görüntüsünü üreten teorik fonksiyon biliniyorsa,  $S_F$  ile karşılaştırılabilmesi mümkündür [20].

#### 4.2. Monte Carlo büyüklük dağılımı tahmin edicileri

Monte Carlo büyüklük dağılımı tahmin edicileri, Monte Carlo yinelenmelerinin [1, 4, 33, 34] sayısı sonsuza yaklaştıkça, yansız ve tutarlı hale gelir. Böylece istatistiksel davranışları, veri büyüklüğü tarafından değil, gerçeklenimlerinde kullanılan bilgisayar programı tarafından kontrol edilir. Bunun ötesinde deneysel tahmin edicisine benzer şekilde doğrulanması güç varsayımlara gerek yoktur.

$F$ ,  $Z^2$  'de tanımlı, bir  $W$  penceresi içinde, kendi olasılık kitle fonksiyonundan b.b.d. örnekler çekilmesi olanaklı bir kesikli rasgele küme olsun; yani,  $\{F^{(k)}, k = 1, 2, \dots\}$ ,  $F$ 'in bir b.b.d. gerçeklenimleri olmak üzere,  $F^{(1)} \cap W, F^{(2)} \cap W, \dots$  şeklinde örnekler çekilebilir.  $S_X(s)$  büyüklük dağılımının bir Monte Carlo tahmin edicisi [20]

$$\left\{ \sum_{k=1}^{K_s} |G_s(F^{(k)}) \cap W|, s \geq 0 \right.$$

$$\left. \hat{S}_{F,1}(s, K_s) = \frac{1}{K_s} \frac{1}{|W|} \right\} \quad (14)$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^{K_s} |J_{|s|}(F^{(k)}) \cap W|, s \leq -1 \right.$$

ile verilir.

$E[\hat{S}_{F,1}(s, K_s)] = S_F(s)$  'dir, ve göreceli hata kareleri ortalaması (HKO),  $S_F(s) \neq 0$  olması koşuluyla, aşağıdaki ifadeyi sağlar

$$\frac{E[(\hat{S}_{F,1}(s, K_s) - S_X(s))^2]}{S_X^2(s)} \leq \frac{1}{K_s} \frac{1 - S_X(s)}{S_X(s)} \quad (15)$$

Böylece,  $\hat{S}_{F,1}(s, K_s)$ ,  $S_F(s)$  büyüklük dağılımının, her  $K_s \geq 1$  için yansız, ve  $K_s \rightarrow \infty$  iken tutarlı bir tahmin edicisi olacaktır. Buna ek olarak Monte Carlo tahmin edicisi

$$\hat{S}_{F,1}(s, K_s, K_{s+1}) = \hat{S}_{F,1}(s, K_s) - \hat{S}_{F,1}(s+1, K_{s+1}) \quad (16)$$

$s_F(s)$  büyüklük dağılımının, her  $K_s, K_{s+1} \geq 1$  için yansız, ve  $K_s, K_{s+1} \rightarrow \infty$  iken tutarlı bir tahmin edicisi olacaktır.

Göreceli HKO,  $W$  gözlem penceresinin büyüklüğünden bağımsız olarak doğrudan Monte Carlo yinelenmelerinin sayısı,  $K_s$ , kontrol edilir. Göreceli HKO, Monte Carlo yinelenmelerinin sayısı ters orantılı olarak  $0^+$  a yaklaşır.  $a$ 'dan büyük olmayacak, tüm  $s$  üzerinde düzgün olarak, bir HKO elde etmek için

$$K_s = \frac{1}{a} \frac{1 - S_F(s)}{S_F(s)}, \quad \forall s \in Z_\infty \quad (17)$$

şeklinde ayarlamak yeterlidir.  $K_s$  'nin değeri, doğrudan  $S_F(s)$ 'nin o anki değerine bağlıdır. Tüm  $s$  değerleri için aynı göreceli HKO'sı elde etmek amacıyla  $S_F(s)$ 'nin küçük değerleri, büyük olanlardan daha çok Monte Carlo yinelenmesine gerek duyar.

$S_F(s)$ , önsel olarak bilinmediğinden ve  $S_F(s) \rightarrow 0^+$  iken  $K_s \rightarrow \infty$  olduğu için, uygulamada sadece önceden belirlenmiş, göreceli HKO'nun  $a$ 'dan daha büyük olmadığı, bir  $t > 0$  eşik değerinin üstündeki büyüklük dağılımı değerlerinin tahmin edilmesine karar verilebilir. Bu durumda

$$K_s = \frac{1-t}{a \cdot t}, \quad \forall s \in Z_\infty \quad (18)$$

şeklinde ayarlanabilir.

(14)'ün sayısal gerçeklenimi,  $s \geq 0$  iken, ve benzer bir değişiklik ile  $s \leq -1$  iken, her  $F \in P$  için  $G_s(F) \cap W^* = G_s(F \cap W) \cap W^*$  olacak şekilde,  $W$  penceresinden daha küçük bir  $W_k$  penceresiyle değiştirilmesini gerektirebilir. Bu,  $W$  üzerinde  $G_s(F^{(k)})$  ve  $J_s(F^{(k)})$  'yi hesaplamak sınır etkilerinden kaçınmak için gereklidir.

Açılışa dayalı büyüklük dağılımı için bir Monte Carlo tahmin edicisi,  $|W \ominus 2|s|B| \neq 0$  sağlanması koşuluyla [29, 30, 31] :

$$\left\{ \sum_{k=1}^{K_s} |[F^{(k)} \cap W] \circ sB| \cap (W \ominus 2|s|B)|, s \geq 0 \right.$$

$$\left. \hat{S}_{F,1}^\circ(s, K_s) = \frac{1}{K_s} \frac{1}{|W \ominus 2|s|B|} \right\}$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^{K_s} |[F^{(k)} \cap W] \bullet |sB| \cap (W \ominus 2|s|B)|, s \leq -1 \right.$$

burada  $i = 1, 2$ ,  $X^{(k)}$  'lerin,  $k = 1, 2, \dots, K_s$ , b.b.d. kesikli rasgele küme olup olmadıklarına bağlıdır.

Diğer yandan aşınmaya bağlı büyüklük dağılımı için bir Monte Carlo tahmin edicisi,  $|W \ominus 2|s|B| \neq 0$  sağlanması koşuluyla [29, 30, 31] :

$$\hat{S}_{X,i}^{\ominus}(s, K_s) = \frac{1}{K_s} \frac{1}{|W \ominus s|B|} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{K_s} |[(X^{(k)} \cap W) \ominus sB] \cap (W \ominus sB)|, \quad s \geq 0 \\ \sum_{k=1}^{K_s} |[(X^{(k)} \cap W) \oplus |s|B] \cap (W \ominus |s|B)|, \quad s \leq -1 \end{array} \right\} \quad (20)$$

burada  $i = 1, 2$  'dir.

(19) ve (20)'deki tahmin ediciler, uygulamada en yararlı olanlardır. Fakat hesaplama maliyetleri çok yüksek olabilir. Bu durum, bu ifadelerin, her Monte Carlo yinelemesinde ((19) için) açılış ve kapanışlar, ((20) içinse) aşınma ve genişlemelerin yeniden hesaplanmasına gerek duymasından kaynaklanmaktadır. Bu sorunu gidermek için  $X'$ 'in  $G_s$  ve  $J_s$  'ye göre birinci dereceden durağan kabul edilebilir. Bu durumda  $S_F(w, s) = S_F(0, s)$  'dir, ve büyüklük dağılımı  $w$ 'den bağımsızdır.

$$S_F(s) = \left\{ \begin{array}{l} E[[G_s(F)](0)], \quad s \geq 0 \\ E[[J_s(F)](0)], \quad s \leq -1 \end{array} \right\} \quad (21)$$

Bu, aşağıdaki açılışa dayalı büyüklük dağılımının Monte Carlo tahmin edicisine neden olur:

$$\hat{S}_{F,i}^{\circ}(s, K_s) = \frac{1}{K_s} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{K_s} \bigvee_{v \in sB} \bigwedge_{w \in sB \oplus \{v\}} F^{(k)}(w), \quad s \geq 0 \\ \sum_{k=1}^{K_s} \bigwedge_{v \in |s|B} \bigvee_{w \in |s|B \oplus \{v\}} F^{(k)}(w), \quad s \leq -1 \end{array} \right\} \quad (22)$$

burada  $i = 1, 2$ ,  $F^{(k)}$  'lerin,  $k = 1, 2, \dots, K_s$ , b.b.d. kesikli rasgele küme olup olmadıklarına bağlıdır.  $V$  ve  $\Lambda$ , sırasıyla, *en-büyük* ve *en-küçüğe* karşılık gelir. Diğer yandan, aşınmaya dayalı büyüklük dağılımının Monte Carlo tahmin edicisi,

$$\hat{S}_{F,i}^{\ominus}(s, K_s) = \frac{1}{K_s} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{K_s} \bigwedge_{w \in sB} F^{(k)}(w), \quad s \geq 0 \\ \sum_{k=1}^{K_s} \bigvee_{w \in |s|B} F^{(k)}(w), \quad s \leq -1 \end{array} \right\} \quad (23)$$

burada  $i = 1, 2$  'dir.  $s \geq 0$  için yukarıdaki ifadeyi ele aldığımızda, her Monte Carlo yinelemesinde, sadece  $sB$  üzerinde  $F^{(k)}$  'nin yerel en-küçüğünü hesaplamaya gerek duyarız. Böylece,  $s \geq 0$  için (23)'teki tahmin edicinin (20)'dekine göre hesaplama açısından daha elverişli olması beklenir. Aynı durum,  $s \leq -1$  için de geçerlidir. Ve (22)'deki tahmin ediciyle (19)'dakini karşılaştırdığımızda da benzer durum söz konusudur.

Bunun ötesinde (22)'deki tahmin edici,  $i=2$  iken,  $S_F(s)$  için asimptotik olarak yansız ve  $K_s \rightarrow \infty$  iken tutarlı bir tahmin edicidir [29, 30, 31].

Benzer üst sınırlar, (20) ve (23)'teki tahmin ediciler için de elde edilebilir. Büyüklük yoğunluğu için tahmin ediciler,

$$\hat{S}_{F,i}^{\circ}(s, K_s, K_{s+1}) = \hat{S}_{F,i}^{\circ}(s, K_s) - \hat{S}_{F,i}^{\circ}(s+1, K_{s+1}) \quad (24)$$

$$\hat{S}_{F,i}^{\ominus}(s, K_s, K_{s+1}) = \hat{S}_{F,i}^{\ominus}(s, K_s) - \hat{S}_{F,i}^{\ominus}(s+1, K_{s+1}) \quad (25)$$

'dir.

### 4.3. Boolean Rasgele Kümelerin Benzetişimi

Monte Carlo tahmin edicisi, Boolean rasgele kümelerin benzetişimi yapılarak elde edilmiştir. Boolean rasgele kümeler, Poisson dağılımına sahip oldukları, Poisson süreçleriyle ifade edildikleri için Poisson benzetişimi yapılmıştır [7, 11, 35]. [2]'de 2-boyutlu Poisson süreçlerinin benzetişimi için örnek bir algoritma verilmiştir. Bu çalışmada Poisson benzetişimi için, anılan çalışmalardan uyarlanan aşağıdaki algoritma kullanılmıştır : 1) rasgele *büyüklük* üret, 2) rasgele *konum* üret, 3) yerleştirilmiş şekillerle ve sınırlarla örtüşme yoksa yerleştir, 4) büyüklükler toplamı, örnek Boolean kümenin büyüklükler toplamının belli bir oranda altında (en düşük değer olarak %10 kullanılmıştır) veya belli bir oranda üstünde (en yüksek değer olarak %10 kullanılmıştır) ise ve  $\lambda_{benzetişim} > \lambda_{örnek}$  ise dur.

### 5. Bulgular ve Tartışma

Bu çalışmada geliştirilen yöntem 256x256 noktalık bir pencerede,  $W$ , sentetik olarak rasgele üretilmiş görüntüler üzerinde sınanmıştır. İncelenen görüntülerin,  $Z^2$  'de tanımlı b.b.d. DSKBRK'lerden oluşmaktadır. DSKBRK'ler, matematiksel morfolojide yaygın olarak kullanılan başlıca yapıtaşı elemanlarıyla incelenmiştir. İncelenen DSKBRK'ler de sentetik olarak aynı yapıtaşı elemanları kullanılarak, birbiriyle ve gözlem penceresi sınırlarıyla örtüşmeyecek ve örtüşme için özel işlem gerektirmeyecek şekilde üretilmiştir. Kullanılan yapıtaşı elemanlarından birisi 4-komşulukludur (paralel kenar, elmas, baklava dilimi) (Şekil 2).

Boolean (Boole) model parametresi olarak şekillerin Minkovskii fonksiyonlarından şekil büyüklüğü katsayısı ( $\hat{\lambda}$ , b.k.),  $k$ , kullanılmıştır.  $a$  ve  $b$  sabit sayılar olmak üzere,  $\hat{\lambda} = k$  olan bir şeklin alanı,  $Alan(\hat{\lambda}_k) = Alan(yapıtışı \text{ elemanı } B_k) = f(k) = a.k + b$  'dir.

Geliştirilen yöntemle, içerdiği en büyük kesikli şekil büyüklüğü katsayısı ( $k_{\hat{\lambda}}$ , b.k.),  $k$ , 4 ile 15 arasında değişen b.b.d. DSKBRK'lerin Boolean model parametreleri morfolojik açılışa bağlı olarak elde edilmiştir.

Elde edilen Boolean model parametreleri, (+) şekil büyüklüğü katsayısının beklenen değerinin deneysel tahmini,  $\hat{\lambda}_{d+}$ , (+) şekil büyüklüğü katsayısının beklenen değerinin Monte Carlo tahmini,  $\hat{\lambda}_{mc+}$ , (+) şekil büyüklüğü katsayısının beklenen değerinin tahmin hatası,  $E_{\lambda+} = \hat{\lambda}_{mc+} - \hat{\lambda}_{d+}$ , şekil büyüklüğü katsayısının beklenen değerinin göreceli tahmin hatası,  $g_{E_{\lambda+}} = (\hat{\lambda}_{mc+} - \hat{\lambda}_{d+}) / \hat{\lambda}_{d+}$ , örnekleri Çizelge 1'de verilmiştir. Detaylı sonuçlar için bkz. [10].

Örnek b.b.d. DSKBRK görüntüsü, Monte Carlo yöntemi uygulanırken benzetişimle üretilen örnek b.b.d. DSKBRK görüntüsü, (+) ve (-) şekil büyüklükleri için deneysel olarak ve Monte Carlo yöntemiyle elde edilen açılışa bağlı şekil büyüklüğü katsayısı spektrumu tahminleri, açılışa bağlı kesikli şekil büyüklüğü katsayısı yoğunluğu ( $k_{\hat{\lambda}}$ , b.k.y.) tahminleri ( $\hat{S}_{d+}^{\circ}$ ,  $\hat{S}_{d-}^{\circ}$

,  $\hat{S}_{mc+}^{\circ}$ ,  $\hat{S}_{mc-}^{\circ}$ ) ve açılışa bağlı kesikli şekil büyüklüğü katsayısı dağılımı ( $k_{\cdot}$ ş.b.k.d.) tahminleri ( $\hat{S}_{d+}^{\circ}$ ,  $\hat{S}_{d-}^{\circ}$ ,  $\hat{S}_{mc+}^{\circ}$ ,  $\hat{S}_{mc-}^{\circ}$ ), (+) şekil büyüklüğü katsayısının beklenen değerinin Monte Carlo yinelemelerinde tahmin hatası,  $E_{\lambda+}(y)$ , ve açılışa bağlı (+) kesikli şekil büyüklüğü katsayısı dağılımı karelendirilmiş göreceli tahmin hatası,  $E(\hat{S}_{+}^{\circ}(k)) = E[(\hat{S}_{mc+}^{\circ}(k) - \hat{S}_{d+}^{\circ}(k))^2] / (\hat{S}_{d+}^{\circ}(k))^2$ , şekil\_tipi=1,  $k_{max+}=6$  ( $\hat{S}_{d+}^{\circ}(k_{max+})=0.322021$ ,  $\hat{\lambda}_{d+}=3.853298$ ,  $\hat{\lambda}_{mc+}=3.857644$ ,  $E_{\lambda+}=0.004346$ ,  $g_{E_{\lambda+}}=0.001128$ ) için Şekil 2.a...p 'de, görsel ve grafik olarak verilmiştir. Aynı zamanda  $\hat{S}_{d+}^{\circ}(k_{max}) = \text{Alan}_{\text{toplaml}}(\text{DSKBRK}_{+}) / \text{Alan}(W)$  'dir. Burada  $\hat{\lambda}_{d+}$ ,  $\hat{\lambda}_{mc+}$ ,  $E_{\lambda+}$  ve  $g_{E_{\lambda+}}$ , sırasıyla  $\hat{\lambda}_{d+}^{\circ}$ ,  $\hat{\lambda}_{mc+}^{\circ}$ ,  $E_{\lambda+}^{\circ}$  ve  $g_{E_{\lambda+}^{\circ}}$  yerine kullanılmıştır.

Boolean model parametreleri elde edilirken (+) şekil büyüklüğü katsayısının beklenen değerinin tahmin hatası  $E_{\lambda+}$  en küçük değerde tutacak şekilde ayarlanmıştır. Diğer parametrelerin tahmin hataları, ayrı ayrı ya da kombinasyonları, en küçük değerde tutulacak şekilde ayarlanması da mümkündür.

Kullanılan benzetişim yöntemi sayesinde,

$$E_{\lambda+} < \text{Alan}(\text{yapıtaşı elemanı } B(k_{max+})) / (\hat{S}_{mc+}^{\circ} \cdot \text{Alan}(W)) \quad (26)$$

olacak şekilde (+) şekil büyüklüğü katsayısının beklenen değerinin tahmin hatası,  $E_{\lambda+}$ , elde edebilmek mümkün olmuştur, burada

$$\hat{S}_{mc+}^{\circ} \cdot \text{Alan}(W) = \text{Alan}_{\text{toplaml}}(\text{DSKBRK}_{mc+}) \quad (27)$$

'dir. (26) ve (27)'den açıkça görüldüğü üzere,  $E_{\lambda+}$  'nın üst sınırı, incelenen DSKBRK'nin içerdiği en büyük şeklin şekil büyüklük katsayısı,  $k_{max+}$ , arttıkça artacak, gözlem penceresinin,  $W$ , büyümesiyle ya da toplam DSKBRK<sub>+</sub> alanının büyümesiyle azalacaktır. Bu sayede yüksek sayıda Monte Carlo yinelemesine gerek kalmaksızın yüksek hassaslıkla parametre tahmini yapabilmek mümkün olmuştur; aşağıdaki Şekillerde ve Çizelgelerde verilen tüm bulgularda tahmin hatalarının değerlerinin düşüklüğü, dolayısıyla parametre tahmininin hassaslığının yüksekliği kolayca görülebilir. Boolean model parametreleri, morfolojik açılışa göre hesaplanmıştır. Aşağıda Şekil 1.a..p'de ve Çizelge 1'de 4 ile 15 arasında değişen şekil büyüklük katsayısı,  $k_{max+}$ , ile elde edilen tüm bulgularda  $k_{max+}$  'daki artışın etkileri de kolayca görülebilir. Bulgular 256x256 noktadan oluşan sabit gözlem penceresinde,  $W$ , elde edilmiştir. Diğer parametreler sabit kalmak üzere, daha büyük gözlem pencereleriyle parametre tahmininin hassaslığının artacağı, daha küçükleriyle azalacağı (26) ve (27)'den kolayca görülebilir, ve  $E_{\lambda+}$  'nın üst sınırının artma ya da azalma oranı ya da kısaca değişim oranı (26) ve (27) ile kolayca hesaplanabilir.  $E_{\lambda+}$  'nın üst sınırı azaldıkça, parametre tahmininin hassaslığı artacaktır, ya da tam tersi, ilki arttıkça, ikincisi azalacaktır.

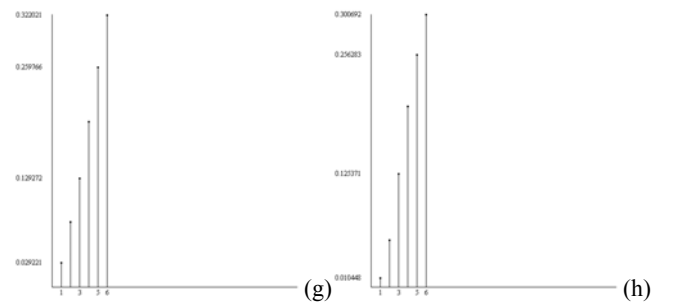
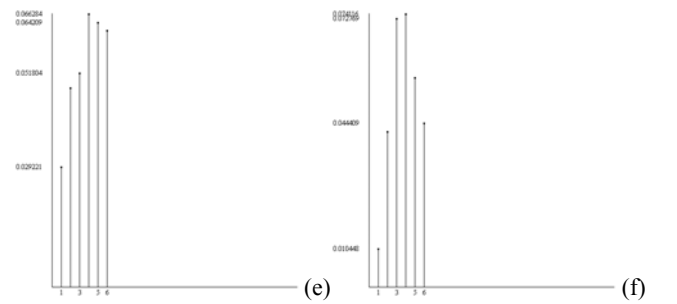
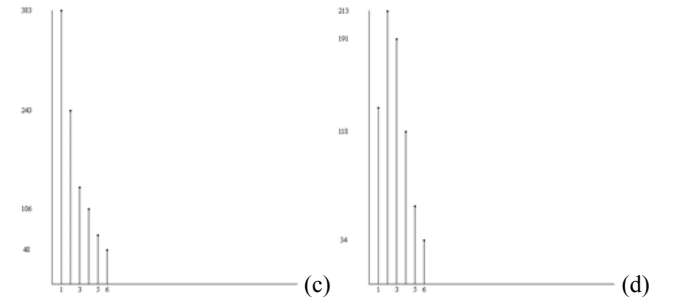
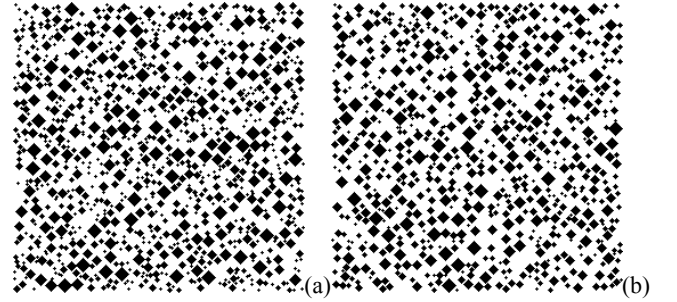
200 civarı Monte Carlo yinelemesinde (+) şekil büyüklüğü katsayısının beklenen değerinin Monte Carlo yinelemelerinde tahmin hatası,  $E_{\lambda+}(y)$ , değişimlerinin azaldığı gözlenmiş, o yüzden  $y=K=200$ . yinelemedeki Monte Carlo tahmin edicisi değerleri kullanılmıştır.

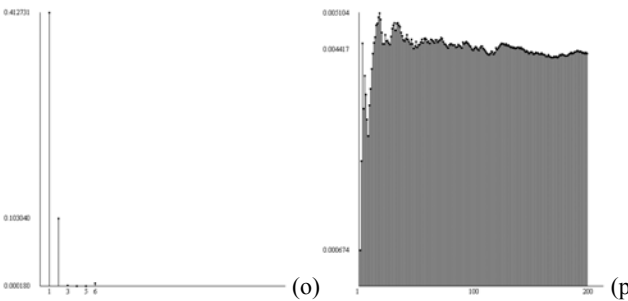
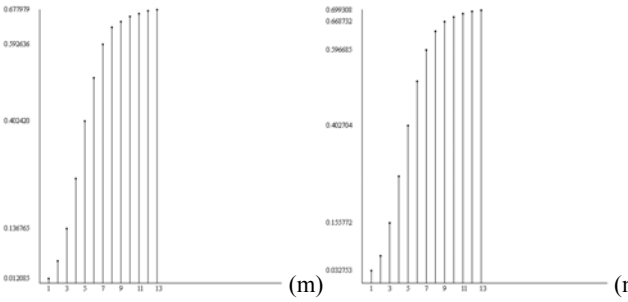
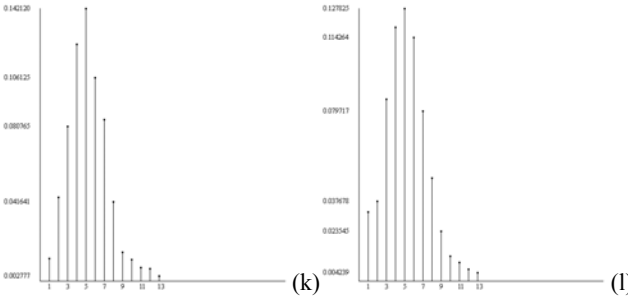
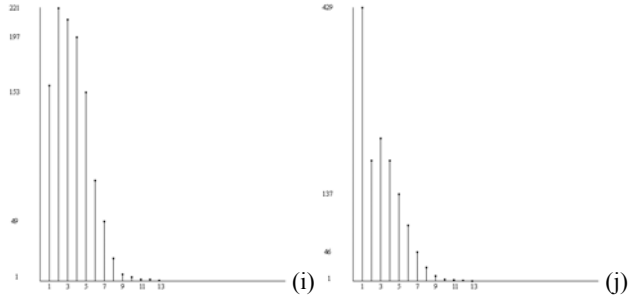
## 5.1. Yöntem ve Uygulama Bağlamında Değerlendirmeler

Morfolojik işleçler, bütün görüntü baştan sonra taranarak uygulanmaktadır. Dolayısıyla, gerekmeyen noktalarda işleç

uygulanmaksızın geçilebilmesi sağlanmışsa da, hesaplama maliyeti yüksektir. DSKBRK'nin bir kez incelenmesinin *hesaplama karmaşası* yaklaşık olarak  $O(m.n).(k_{max+}+k_{max-})$  düzeyindedir, burada  $m$  ve  $n$ , gözlem penceresinin, yani incelenen görüntünün, boyutlarıdır. Monte Carlo yönteminin hesaplama karmaşası ise yaklaşık olarak  $(O(m.n).(k_{max+}+k_{max-,mc})+O(d_{mc+})).y$  düzeyindedir, burada  $y$  Monte Carlo yineleme sayısı,  $k_{max-,mc}$  Monte Carlo yinelemelerinde  $k_{max-}$  'lerin ortalaması, ve  $d_{mc+}$  ise DSKBRK<sub>mc</sub> 'lerdeki (+) şekillerin toplam sayısının ortalamasıdır.

Geliştirilen yöntem, parametre (Poisson parametresi  $\lambda$ ) tahminine dayalıdır. Monte Carlo yinelemelerinde kullanılan benzetişim yöntemi de parametre tahminine dayalıdır. Eldeki görüntüyle benzetişimle üretilenler arasındaki benzerlik ölçütü, model parametresidir. Mekansal korrelasyon dikkate alınmamaktadır.





Şekil 1.a. DSKBRK örnek,  $k_{\max+}=6$  ( $\hat{S}_{d+}^{\circ}(k_{\max+})=0.322021$ ),

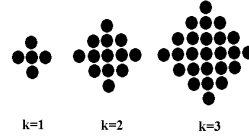
- Örnek'ten MC yöntemi için benzetişimle üretilen görüntülerden biri,
- (+) k.ş.b.k. spektrumu deneysel tahmini,
- (+) k.ş.b.k. spektrumu Monte Carlo tahmini,
- $\hat{S}_{d+}^{\circ}$ , (+) k.ş.b.k. yoğunluğu deneysel tahmini,
- $\hat{S}_{mc+}^{\circ}$ , (+) k.ş.b.k. yoğunluğu Monte Carlo tahmini,
- $\hat{S}_{d+}^{\circ}$ , (+) k.ş.b.k. dağılımı deneysel tahmini,
- $\hat{S}_{mc+}^{\circ}$ , (+) k.ş.b.k. dağılımı Monte Carlo tahmini,
- (-) k.ş.b.k. spektrumu deneysel tahmini,
- (-) k.ş.b.k. spektrumu Monte Carlo tahmini,
- $\hat{S}_{d-}^{\circ}$ , (-) k.ş.b.k. yoğunluğu deneysel tahmini,
- $\hat{S}_{mc-}^{\circ}$ , (-) k.ş.b.k. yoğunluğu Monte Carlo tahmini,

m.  $\hat{S}_{d-}^{\circ}$ , (-) k.ş.b.k. dağılımı deneysel tahmini,

n.  $\hat{S}_{mc-}^{\circ}$ , (-) k.ş.b.k. dağılımı Monte Carlo tahmini,

o.  $E(\hat{S}_{+}^{\circ}(k))$ , (+) k.ş.b.k. dağılımı karelendirilmiş göreceli tahmin hatası,

p. (+) k.ş.b.k.'nın beklenen değerinin MC yinlemelerindeki tahmin hatası,  $E_{\lambda+}(y)$ .



Şekil 2. 4-komşuluklu (paralel kenar, elmas, baklava dilimi) yapıtaşı elemanı ailesinin  $k=1,2,3$  üyeleri

Çizelge 1. Elde edilen Boolean model parametreleri (+)

$k_{\max}$	$\hat{S}_{d+}^{\circ}(k_{\max+})$	$\hat{\lambda}_{d+}$	$\hat{\lambda}_{mc+}$	$E_{\lambda+}$	$g_{-}E_{\lambda+}$
4	0,179810	3,071368	3,073225	0,001857	0,000605
5	0,205368	3,712312	3,715092	0,002780	0,000749
6	0,208786	4,429876	4,435104	0,005228	0,001180
7	0,229355	4,914909	4,923089	0,008179	0,001664
8	0,300690	5,206739	5,216215	0,009476	0,001820
10	0,311783	6,074439	6,088842	0,014403	0,002371
11	0,320618	6,027461	6,042691	0,015230	0,002527
12	0,329681	6,464038	6,484190	0,020152	0,003118
14	0,336456	6,988753	7,040711	0,051959	0,007435
15	0,338257	7,938380	8,007640	0,069260	0,008725

## 6. Sonuç

Geliştirilen yöntem, DSKBRK görüntülerin incelenmesi için tasarlanmıştır. Geliştirilen yöntemin incelenilecek görüntü türlerinin arttırılması yönünde genişletilmesi, kullanılacak istatistiksel yöntemlerin de görüntü türüne uygun olarak, çok değişkenli istatistiksel analizi, yüksek derece momentleri, ve bazı özel istatistiksel modelleri de içerecek şekilde genişletilmesini gerektirecektir. Benzer şekilde, kullanılan benzetişim yönteminin de, incelenen görüntü için varsayılan modelleri de içerecek şekilde genişletilmesi gerekecektir.

Geliştirilen yöntem, parametre tahminine dayalıdır. Tahmin edilen parametreler, şekil büyüklüğü ile ilişkilidir. Yapıtaşı elemanına bağlı olarak göreceli tahmin yapılmaktadır. Kullanılan yapıtaşı elemanları, aynı zamanda incelenen şekillerin geometrik özellikleri hakkında da fikir vermektedir. Düzgün geometrik olmayan şekiller içeren görüntülerin farklı yapıtaşı elemanlarıyla incelenmesi, incelenen şekillerin geometrik özellikleri hakkında daha fazla bilgi sağlayacaktır. Geliştirilen yöntem, şekilleri tanımlamada kullanılan şekil büyüklüğünü temel alan tüm yöntemleri gerçekler hale kolayca genişletilebilir. Geliştirilen yöntem, şekil taneciklerinin çekirdek merkezlerinin konularının birbiriyle ilişkisinin istatistiksel analizi yapılabilecek hale de kolayca genişletilebilir.

## 7. Kaynakça

- [1] Bayne, C.K., Beauchamp, J.J., Begovich, C.L. and Kane, V.E. 1980. Monte Carlo comparisons of selected procedures. *Pattern Recognition*, vol.12, 51-62.
- [2] Chen, H. 2004. Monte Carlo methods for statistical inference : generation of random numbers. (unpublished).
- [3] Choquet, G. 1953. Theory of capacities. *Ann. Institute Fourier*, 5, 131-295.
- [4] Gelman, A. and Rubin, D.B. 1992. Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical Science*, vol.7, no.4, 457-511.
- [5] Goutsias, J. 1997. *Markov Random Fields: Interacting Particle Systems for Statistical Image Modeling and Analysis*. Technical Report 96-01, John Hopkins University, ECE Dept., 68.
- [6] Goutsias, J. and Batman, S. 2000. Morphological methods for biomedical image analysis. *Handbook of Medical Imaging*, vol.2, *Medical Image Processing and Analysis*, M. Sonka, J.M. Fitzpatrick (ed.s), SPIE Press, Bellingham, Washington, 175-272.
- [7] Heikkinen, J. and Arjas, E. 1998. Non-parametric Bayesian estimation of a spatial poisson intensity. *Scand. J. Statist.*, vol.25, 435-450.
- [8] Kendall, D.G. 1974. *Foundations of a theory of random sets*. *Stochastic Geometry*, Harding, E. F., Kendall, D. G., (eds.), John Wiley & Sons, Great Britain.
- [9] Kendall, M.G. and Moran, P.A.P. 1963. *Geometric Probability*. Charles Griffin & Company Limited, 139, London.
- [10] Küçüköncü, T. 2007. *Örüntü Tanıma Ve Görüntü Analizinde Rasgele Yapay Sinir Ağı Kullanımıyla Boolean Rasgele Kümelerin Modellenmesi*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, FBE, 165.
- [11] Lantuejoul, C. 2002. Conditional simulation of a boolean model. unpublished.
- [12] Lieshout, M.N.M. Van. 1997. *Size Distributions in Stochastic Geometry*. Report PNA-R9715, CWI, Amsterdam, NL.
- [13] Lieshout, M.N.M. Van. 1999. Size-biased random closed sets. *Pattern Recognition*, vol.32, no.9, 1631-1644.
- [14] Matheron, G. 1967. *Elements pour une theorie des Milieux Poreux*. Masson.
- [15] Matheron, G. 1975. *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley, 261, New York.
- [16] Molchanov, I.S. 1990. Estimation of the size distribution of spherical grains in the Boolean model. *Biom. J.*, 7, 877-886.
- [17] Molchanov, I.S. 1995. Statistics of the Boolean model : from the estimation of means to the estimation of distributions. *Adv. Appl. Prob.*, 27, 63-86.
- [18] Molchanov, I.S. 1997. *Statistics of the Boolean Model for Practitioners and Mathematicians*. John Wiley & Sons, 162, England.
- [19] Molchanov, I.S. 1999. Random closed sets : results and problems, (Chapter 7). *Stochastic Geometry, Likelihood and Computation*, Barndorff-Nielsen, O., Kendall, W., Lieshout, M.N.M. (ed.s), Chapman & Hall / CRC.
- [20] Moore, M. and Archambault, S. 1991. On the asymptotic behaviour of some statistics based on morphological operations. *Spatial Statistics and Imaging*, Possolo, A. (ed.), vol.20, Hayward, California, Institute of Mathematical Statistics, Lecture Notes, Monograph Series, 258-274.
- [21] Norberg, T. 1984. Convergence and existence of random set distributions. *Annals of Probability*, 12, 726-732.
- [22] Pitman, J. 2005. *Poisson Point Processes*. Lecture Notes. U. of California at Berkeley, Math. Dept. (unpublished).
- [23] Potamianos, G. and Goutsias, J. 1991. A novel method for computing the partition function of Markov random field images using Monte Carlo simulations. *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process.*, Toronto, vol.4, 2325-2328.
- [24] Santalo, L.H. 1976. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley, 404, USA.
- [25] Serra, J. 1982. *Image Analysis And Mathematical Morphology*. Academic Press, 610, London.
- [26] Sidiropoulos, N.D. 1992a. *Statistical Inference, Filtering, and Modeling of Discrete Random Sets*. Ph.D. Dissertation, University of Maryland, Baltimore, Dept. of Electrical Eng., 196.
- [27] Sidiropoulos, N.D. 1992b. On the tractability of estimating the germ process of certain germ-grain random set models and related problems. *Pattern Recognition*, 32, 1667-1674.
- [28] Sivakumar, K. 2000. *Morphological Analysis of Random Fields : Theory and Applications*. Ph.D. Dissertation, John Hopkins University, 168, Baltimore, Maryland, USA.
- [29] Sivakumar, K. and Goutsias, J. 1994. Monte Carlo estimation of morphological granulometric discrete size distributions. *Mathematical Morphology and Its Applications to Image Processing*, ed. Serra, J., Soille, P., Dordrecht, The Netherlands : Kluwer, 233-240.
- [30] Sivakumar, K., Goutsias, J. 1997a. Discrete morphological size distributions and densities : estimation techniques and applications. *J. Electronic Imaging*, 6(1), 31-53.
- [31] Sivakumar, K. and Goutsias, J. 1997b. On estimating granulometric discrete size distributions of random sets. *Random Sets : Theory and Applications*, J.
- [32] Underwood, E.E. 1972. The stereology of projected images. *J. of Microscopy*, vol.95, no.1, 25-44.
- [33] Vo, B.-N. Vo, B.-T. and Singh, S. 2004. Sequential Monte Carlo methods for static parameter estimation in random set models. *Proc. of the Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing Conf.*, 2004, 14-17 Dec., 313-318.
- [34] Vo, B.-N., Singh, S. and Doucet, A. 2005. Sequential Monte Carlo methods for multitarget filtering with random finite sets. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol.41, no.4, Oct., 1224-1245.
- [35] Whitt, W. 2005. *Introduction to Operations Research : Stochastic Models*. Lecture Notes (IEOR 4106). Ind. Eng. and Op. Res. Dept., Columbia University in the City of New York, USA, Spring. (unpublished).