

ZAMAN DÜZLEMİNDE SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE MİKROŞERİT HATLARA UYGULANAN MUR VE DISPERSİVE(DBC) SINIR KOŞULLARININ ANALİZİ

*S. Cumhur BAŞARAN

**Gonca ÇAKIR

*Akdeniz Üniversitesi, Teknik Bilimler M.Y.O., Elektrik - Elektronik Programı
Kampüs – Antalya

E-mail: cbasaran@teknik.akdeniz.edu.tr

**Kocaeli Üniversitesi, Elektronik ve Haberleşme Müh., Veziroğlu Kampüsü - İzmit

ABSTRACT

This study is based on the Finite Difference Time Domain (FDTD) method Which was first investigated by Yee in 1966 [1]. This method is espacially focused on the issues, finite difference method. line modelling, speration in time and position. Reflections from the artificial boundaries due to using limited number of cells have been observed. The performance of Dispersive boundery condition (DBC) and MIJR type boundary conditions are compared with each other through digital results obtained by the application of FDTD. This method is widely used in todays researches for solving the scaterring problems, near to far field transformations, resonators, radars mobile phones.

1.GİRİŞ

Günümüzde, elektromagnetik alan ve dalga ile mikrodalga tekniği problemlerinde yoğun olarak sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Bunlar probleme özgü özel sayısal teknikler olabileceği gibi, ilgili alanlarda, oldukça geniş problem gruplarına uygulanabilen yöntemlerde olabilmektedir. Bu yöntemde denklemlere sürekli değil, ayrık yaklaşım söz konusudur. Çünkü ayrık yaklaşım, bilgisayar yardımıyla denklemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Bu çalışmada kullanılan FDTD yöntemi de bu esasa göre oluşturulmuştur. FDTD yöntemi, diferansiyel formdaki maxwell denklemlerinin doğrudan zaman domeninde üç boyutlu olarak ayrıklaştırılıp çözülmesidir. Maxwell'in rotasyonel denklemlerindeki diferansiyel operatörler sayısallaştırılıp sonlu farklar eşdeğeri ile değiştirilir. Böylece elde edilen ayrık denklemler ele alınan yapıya ait sınır koşulları da sağlanarak iteratif olarak çözülürken, ilgili yapıdaki elektromagnetik dağılım simüle edilmiş olur. FDTD yöntemi uygulanırken sınırlı sayıda hücre kullanıldığından yapay sınırlardan yansımalar olmaktadır. Bu yansımaların giderilmesi için Dispersive sınır koşulu (DBC) ve MUR tipi sınır koşulları uygulanarak sonuçları karşılaştırılmıştır.

2. SONLUFARKLAR(FD) YÖNTEMİ

Bilindiği gibi, fonksiyonların analitik olarak verildiği durumlarda, istenilen noktalardaki fonksiyon

değerlerini hesaplamak fonksiyonun belirli noktalarında istenilen mertebeden türevlerini bulmak ya da fonksiyonun belirli aralıklardaki integrallerini hesaplamak kolaylıkla yapılabilmektedir. Ancak, fonksiyonların bazı ayrık noktalardaki değerleri belli iken bu tür hesaplamalar sonlu farklar aritmetiği kullanılarak yaklaşık olarak yapılabilmektedir. Hatta, analitik çözümlerin belli olduğu durumlarda bile sonlu farklar kullanım kolaylığı açısından tercih edilebilmektedir.

2.1. Sonlu Farklarla Yaklaşık Türev Hesabı

Bir takım ayrık noktalarda değeri bilinen $y = f(x)$ fonksiyonunun, bir noktasındaki türevini, bilinen bu değerleri kullanarak, yaklaşık olarak hesaplamak mümkündür. Benzer şekilde $z = f(Y,y)$ türündeki çok değişkenli fonksiyonlar için yaklaşık kısmi türev formülleri de verilebilir. Bunun için genellikle bu fonksiyonun söz konusu nokta civarındaki Taylor serisi açılımından yararlanılır.

Türev tanımı göz önüne alınarak İleri Fark Yaklaşımı, Geri Fark Yaklaşımı ve Merkezi Fark Yaklaşımı üzerinde durulmuştur.

2.1.1. İleri Fark Yaklaşımı

$$f(x_i + h) = f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + \frac{h^3}{6}f'''_i + \dots \quad (1)$$

Taylor seri açılımından,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{1}{2}hf''_i - \frac{1}{6}h^2f'''_i - \dots \quad (2)$$

yazılabilir. Birinci terimden sonraki terimler kesilerek,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \quad (3)$$

İleri Fark Yaklaşımı elde edilir.

2.1.2. Geri fark yaklaşımı

$$f(x_i - h) = f_{i-1} = f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + \frac{h^3}{6}f'''_i + \dots \quad (4)$$

Taylor seri açılımından,

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} - \frac{1}{2}hf''_i - \frac{1}{6}h^2f'''_i + \dots \quad (5)$$

yazılabilir. Birinci mertebeden sonraki terimler kesilerek,

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \quad (6)$$

elde edilir.

2.1.3. Merkezi fark yaklaşımı

$$f(x_i + h) = f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + \frac{h^3}{6}f'''_i + \dots \quad (7)$$

$$f(x_i - h) = f_{i-1} = f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + \frac{h^3}{6}f'''_i + \dots \quad (8)$$

Taylor seri açılımları göz önüne alınarak, taraf tarafa çıkarma yapılırsa,

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf'_i + \frac{1}{3}h^3f'''_i + \dots \quad (9)$$

sonucu elde edilir. Buradan da,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{1}{6}h^2f'''_i + \dots \quad (10)$$

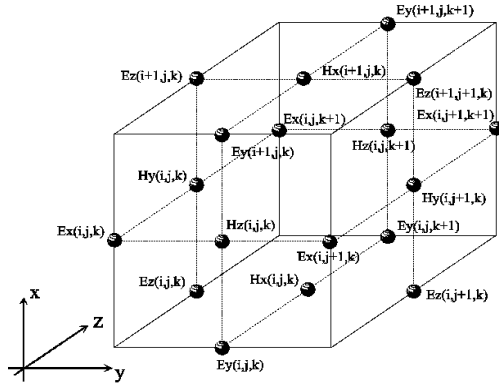
veya

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad (11)$$

elde edilir.

3. FDTD YÖNTEMİ

Zaman düzleminde sonlu farklar yönteminde, üç boyutlu problemlerde uzaydaki ayrıklaştırma, Yee tarafından önerilen birim hücre kullanılarak gerçekleştirilir. (Şekil 1)



Şekil 1. Yee Hücresi

FDTD yönteminin formülasyonu için başlangıç noktası Maxwell' in rotasyonel denklemleridir. Bu denklemler, üç boyutlu FDTD yönteminin uygulanabilmesi için, Yee birim hücresi göz önüne alınarak şu şekilde ayrıklaştırılmalıdır [2]:

$$E_x^{n+1}(i, j, k) = E_x^n(i, j, k) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[\frac{H_z^{n+1/2}(i, j+1, k) - H_z^{n+1/2}(i, j, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+1/2}(i, j, k+1) - H_y^{n+1/2}(i, j, k)}{\Delta z} \right] \quad (12)$$

$$E_y^{n+1}(i, j, k) = E_y^n(i, j, k) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[\frac{H_x^{n+1/2}(i, j, k+1) - H_x^{n+1/2}(i, j, k)}{\Delta z} - \frac{H_z^{n+1/2}(i+1, j, k) - H_z^{n+1/2}(i, j, k)}{\Delta x} \right] \quad (13)$$

$$E_z^{n+1}(i, j, k) = E_z^n(i, j, k) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[\frac{H_y^{n+1/2}(i+1, j, k) - H_y^{n+1/2}(i, j, k)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+1/2}(i, j+1, k) - H_x^{n+1/2}(i, j, k)}{\Delta y} \right] \quad (14)$$

$$H_x^{n+1/2}(i, j, k) = H_x^{n-1/2}(i, j, k) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i, j, k) - E_z^n(i, j-1, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i, j, k) - E_y^n(i, j, k-1)}{\Delta z} \right] \quad (15)$$

$$H_y^{n+1/2}(i, j, k) = H_y^{n-1/2}(i, j, k) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i, j, k) - E_x^n(i-1, j, k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j, k) - E_z^n(i, j+1, k)}{\Delta x} \right] \quad (16)$$

$$H_z^{n+1/2}(i, j, k) = H_z^{n-1/2}(i, j, k) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_y^n(i, j, k) - E_y^n(i, j-1, k)}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i, j, k) - E_x^n(i, j+1, k)}{\Delta y} \right] \quad (17)$$

$\Delta x, \Delta y$ ve Δz problem uzayını ayrıklaştırmak için kullanılan birim hücrenin sırasıyla x, y ve z yönündeki boyutlarıdır. Δt ise zaman adımını ifade etmektedir. Zaman adımının tespitinde kullanılması gereken kararlılık koşulu;

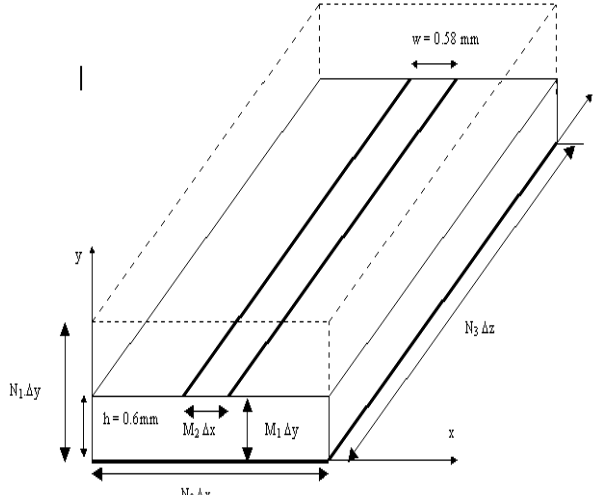
$$c \cdot \Delta t \leq \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right]^{-1/2} \quad (18)$$

şeklinde ifade edilen “Courant Kararlılık Koşulu” dur[3]. Bu çalışmada $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ alındığı için (18) numaralı denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

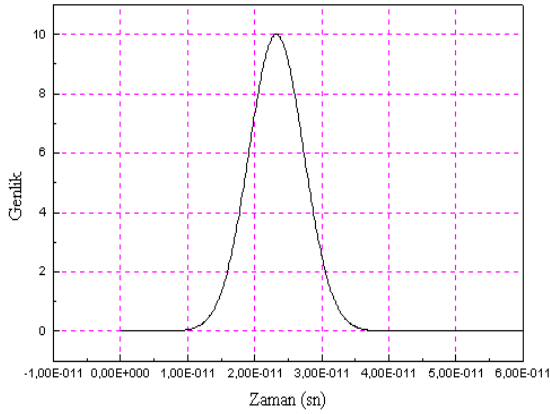
$$V_{\max} \cdot \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta h \quad (19)$$

4. FDTD YÖNTEMİNİN MİKROŞERİT HATTA UYGULANMASI

Yönteminin uygulandığı mikroşerit hat üç boyutlu olarak tanımlanmıştır. Hattın tabanının sıfır kalınlıklı mükemmel iletken tabaka ile kaplı, üst kısmında ise w genişliğinde sıfır kalınlıklı mükemmel iletken şerit bulunduğu kabul edilmiş, mikroşerit hat oluşturan hücrelerin kenarları $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.058$ mm alınmıştır. Analizi yapılan hattın yapısı Şekil 2 'de görüldüğü gibidir. Programda kaynak olarak Gauss fonksiyonu kullanılmıştır. Gauss fonksiyonu, programda $e^{-\alpha(t-\beta\Delta t)^2}$, $\alpha = (4/\beta\Delta t)^2$ şeklinde tanımlanmıştır.



Şekil 2. Mikroşerit Hat



Şekil 3. Mikroşerit Hattı Uygulanan Gauss Darbesi

5. SINIR KOŞULLARI

Sınır koşulunun tanımlanması her zaman gerekli değildir. Eğer FDTD problem uzayı sonlu fark denklemleri ile doğrudan tanımlanabilen koşullarla sonlandırılmışsa, sınır koşulu tanımına gerek kalmaz. Örneğin, dalga kılavuzu içindeki elektromanyetik olay modelleneyecek ise, teğet elektrik alan duvarlar üzerinde sıfırdır, ve bu durumda ayrıca sınır koşulu tanımına gerek duyulmaz. Ancak mikroşerit devre elemanlarının FDTD yöntemi ile analizinde sınır koşulu tanımlaması yapılmadığı takdirde, gerçekte olmayan ancak bizim sınırlandırmamız ile oluşan yapay sınırlardan yansımalar meydana gelir. Bu çalışmada mikroşerit hattın sınırlarında birinci derece yaklaşıklıkla Mur tipi ve dağıtıcı sınır koşulları kullanılmıştır. Gerrit Mur tarafından tanımlanan 1. derece MUR tipi sınır koşulu denklemi $x=0$ düzlemi için,

$$(\partial x + c_0^{-1} \partial t) E = 0 \quad (20)$$

şeklinde yazılabilir [4]. $x=0$ düzleminde teğet elektrik alan;

$$E_z^{n+1}(0, j, k + 1/2) = E_z^n(1, j, k + 1/2) + \frac{c_0 \Delta t - \Delta y}{c_0 \Delta t + \Delta y} \quad (21)$$

$$E_z^{n+1}(1, j, k + 1/2) - E_z^n(0, j, k + 1/2)$$

şeklinde sayısallaştırılabilir.

α faktörü ile düzeltilmiş dağıtıcı sınır koşulu tanımlaması;

$$(\partial z + v_1^{-1} \partial t + \alpha_1)(\partial z + v_2^{-1} \partial t) E = 0 \quad (22)$$

şeklinde yapılmıştır[5].

6. SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışmada, şekil 2’de verilen sonsuz uzun Mikroşerit hattın FDTD yöntemi ile analizleri yapılmıştır. Hatta kullanılan parametreler aşağıda verilmiştir.

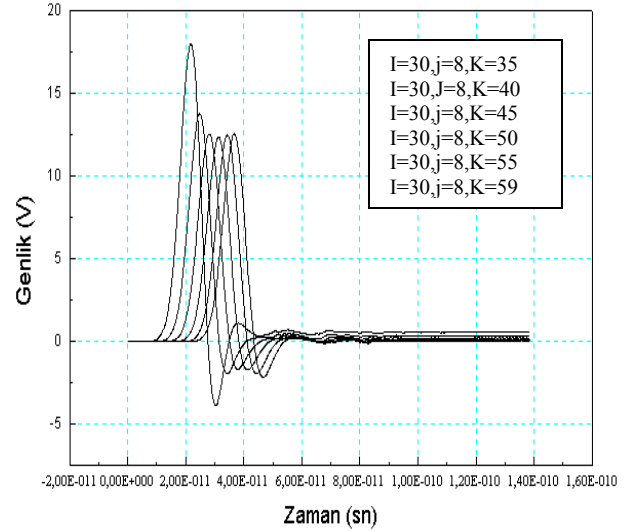
Dielektrik tabakanın kalınlığı : $h=0.58\text{mm}$

Metal şeritin genişliği : $w=2.4\text{mm}$

Metal şeritin kalınlığı : $t=0$

Hücreboyutu : $\Delta x=\Delta y=\Delta z=0.058\text{mm}$

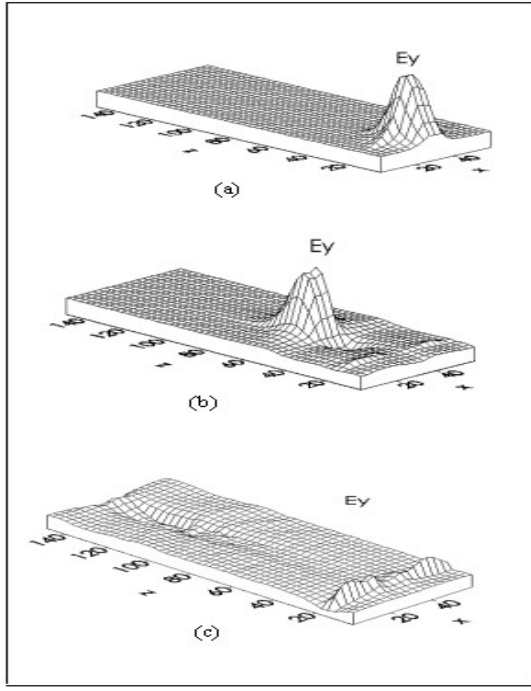
$N_1=20, N_2=60, N_3=140, N_4=90$



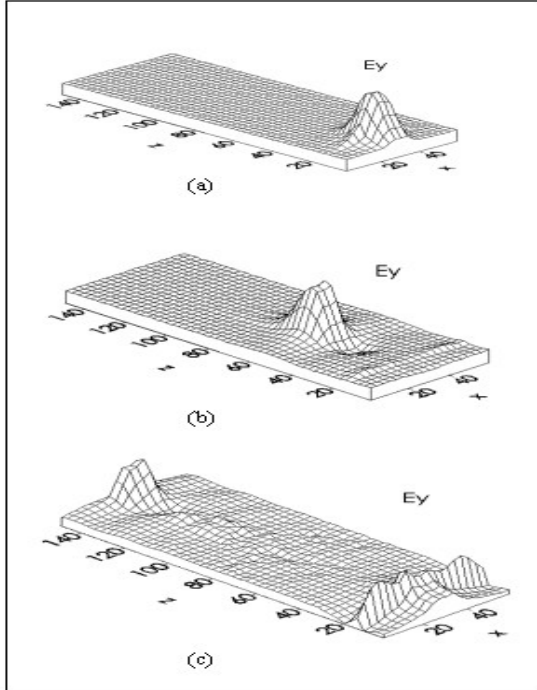
Şekil 4. Sonsuz uzun mikroşerit hat üzerinde elektrik alan bileşeni E_y nin zamana göre değişimi

Sonsuz uzun mikroşerit hat, Dispersive sınır koşulu uygulanması durumunda elektrik alan bileşeni E_y nin zamana göre değişimi şekil 4’ de verilmiştir.

Şekil4’de verilen zaman analizi I ve J’ nin sabit değerleri için K değiştirilerek yapılmıştır. Şekilden de görüldüğü gibi E_y alan bileşeni mikroşerit hat boyunca (z eksen yönünde) ilerlemektedir. Kaynağa yakın bölgede darbe genliği yüksektir, ancak birkaç zaman adımı sonrasında genlikte ani bir düşme meydana gelmekte ve yayılım kararlı bir hal almaktadır. Hat sonundan göz ardı edilebilecek derecede az yansıma olmakta alan bileşeni sonsuz uzun bir hat boyunca yayılmıyormuş gibi davranmaktadır.

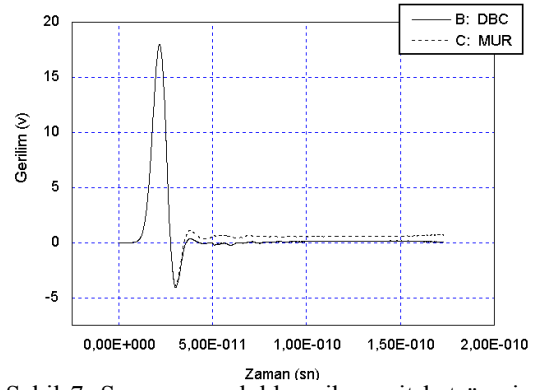


Şekil 5. Değişik zaman adımlarında Dispersive (DBC) Sınır Koşulu Uygulanan Sonsuz Uzun Mikroşerit Hat içindeki E_y Alan bileşeninin davranışı



Şekil 6. Değişik zaman adımlarında MUR Sınır Koşulu Uygulanan Sonsuz Uzun Mikroşerit Hat içindeki E_y Alan bileşeninin davranışı

Şekil 5 ve Şekil 6' da E_y alan bileşeninin sonsuz uzun mikroşerit hat boyunca farklı zaman adımlarındaki davranışı verilmiştir. ilgili zaman adımları şöyledir; (a) $2000\Delta t$, (b) $4000\Delta t$, (c) $10000\Delta t$



Şekil 7. Sonsuz uzunluklu mikroşerit hat üzerinde E_y alan bileşeninin farklı sınır koşullarında zamana göre değişimi

Dispersive sınır koşulu (DBC) ve Mur sınır koşullarının ayrı ayrı mikroşerit hatta uygulanmasıyla elde edilen simülasyon sonuçlarından DBC' nin daha iyi yutma özelliği gösterdiği, yani sınıra ulaşan dalganın ilerleyişini problem uzayının devamında sürdürüyormuş izlenimi vererek, ilgili dalganın çok az bir kısmını yansıtmıştır.

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada üç boyutlu FDTD yöntemi sonsuz uzun mikroşerit hatta uygulanmış, yapay sınırlardan meydana gelen yansımaları engellemek amacıyla uygulanan MUR tipi ve dağıtıcı sınır koşulları incelenmiştir. Analizler neticesinde FDTD yönteminin mikroşerit hatlarda iyi sonuçlar verdiği ve dağıtıcı sınır koşullarının MUR tipi sınır koşuluna kıyasla yansımaları daha çok engellediği gözlenmiştir.

8. KAYNAKÇA

- [1] K. S. Yee. " Numerical solution of initial boundary value problem involving maxwvell's equations in isotropic media. "IEEE Trans. Antennas and Propagat., AP-14, pp.302- 307, 1966.
- [2] David M. Sheen, Sami M. Ali. " Application of the three dimensional finite-difference time-domain method to the analysis of planar microstrip circuits." IEEE Trans. Microwave Teory Tech., vol. 38, no.7, pp.849-857, July 1990
- [3] Kunz Karl S., Luebbers Raymond J. "Finite difference time domain method for electromagnetics" CRC Press, Inc., I 993.
- [4] G. Mur " Absorbing boundary conditions for the finite difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations" IEEE Trans. Electromag. Compat., EMC-23, pp.377-382, Nov.1981.
- [5] Z. Bi. K. Wn C. Wu, J. Litva, " A dispersive boundary condition for microstrip component analysis using the ftd method "IEEE Trans. Microwave Theory Tech.,MTT-40, pp.774-7~7, 1992.
- [6] SEVGİ, L., 1999. "Elekhomagnetik Problemler ve Sayısal Yöntemler." Birsen Yayınevi Ltd. Şti., Y.0E129, İstanbul