DALGACIK ORTAMINDA ZAMANLA DEĞİŞEN LİNEER SİSTEM ANALİZİNDE FARKLI DALGACIKLARIN ETKİLERİ

Hasari KARCİ[1] **Gülay TOHUMOĞLU**[2]

Elektronik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Mühendislik Fakültesi
Gaziantep Üniversitesi, 27310, Gaziantep

[1]karci@gantep.edu.tr [2] g_tohumoglu@gantep.edu.tr

ABSTRACT

In this paper, linear time-varying systems (LTVS) are analyzed in wavelet domain for different depth values of multi-resolution analysis and different types of orthogonal compact support wavelet. LTVS differential equations are expressed as algebraic matrix-vector relations in wavelet domain. Effect of wavelet types (Daubechies, Coiflets, and Symlets) in these equations is examined. Furthermore, Effect of resolution depth and different moments of Daubechies, Symlets and Coiflets wavelets is investigated. It is concluded that, performance of method is mainly dependent on resolution depth and wavelet types. According to results, while Coiflets wavelet gives better performance than Daubechies and Symlet wavelet, Haar wavelet gives the worst performance. Increasing the wavelet's moment has a slight effect on method's performance.

Keywords: Linear time-varying system analysis, Wavelet transform.

ÖZET

Bu bildiride, dalgacık dönüşümüyle zamanla değişen lineer sistemlerin (ZDLS) çözümü farklı dalgacık tipleri ve farklı derinlik değerleri için analizi edilmektedir. Dalgacık ortamında ZDLS' yi tanımlayan diferansiyel denklemler matris-vektör ilişkisi olarak ifade edilir. Bu denklemlerde farklı dalgacık tiplerinin (Haar, Daubechies, Symlets, Coiflets) etkileri incelenmiştir. Ayrıca, bu incelemelerde dalgacık momentlerinin ve çok-çözünürlük analizinin derinlik değerinin etkisi incelenmiştir. Yapılan çalışma neticesinde metodun performansının en fazla derinlik değerine ve ayrıca dalgacık tipine bağlı olduğu ortaya çıkmıştır. Buna göre Coiflets dalgacığı Daubechies ve Symlet dalgacığına göre daha iyi sonuç verirken, Haar dalgacığı en düşük performansı göstermektedir. Dalgacık momentinin arttırılmasının performans üzerindeki etkisinin sınırlı olduğu da gözlemlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Zamanla değişen lineer sistem analizi, dalgacık dönüşümü

1. GİRİŞ

Dalgacık dönüşümü son 25 yılda pek çok farklı alanda pratik ve teorik çalışmalarda kullanılmakla birlikte halen bu konudaki araştırmalar devam etmektedir [1, 2]. Dalgacıklar dikgen ve kısmi tanımlı olmalarından dolayı, görüntü ve ses işlemede, gürültü eliminasyonunda, biyo-medikal sinyallerin işlenmesi vb. alanlarda başarılı bir şekilde kullanılmaktadır.

Dalgacık dönüşümü ile zamanla değişen lineer sistemlerin (ZDLS) çözümü dalgacıkların oldukça yeni bir uygulama alanıdır. Xiangqian L. ve Lin Z integral operatör matrisini Haar dalgacığı için tanımlamış ve birinci dereceden denklem sistemlerine uygulamıştır [3]. Hsiao C. H. ve Wang W. J. ise yine Haar dalgacığı için tanımladıkları operatör matrislerini zamanla değişen kesikli ve sürekli lineer sistemlerin çözümünde kullanmışlardır [4, 5]. Metodun genelleştirilmesi ve farklı dikgen dalgacıklar için uygulanması ise [6, 7] nolu kaynaklarda gösterilmiştir.

Bu metotta, sistemin davranışını gösteren diferansiyel denklem, dalgacık dönüşümü kullanılarak tanımlanmış olan operatör matrisleri ile dalgacık ortamında ifade edilir. Böylece sistemi ifade eden türevli denklem, cebirsel matris-vektör ilişkisine dönüştürülür. Matris-vektör ilişkisinin çözümünden elde edilen dalgacık çözüm vektörü ters dalgacık dönüşümü ile tekrar zaman ortamına aktarılarak sistemin zaman ortamındaki çözümü elde edilmiş olur. Bu metodun avantajı karmaşık sistem denklemleri yerine cebirsel ilişkilerin kullanılmasıdır.

Bu bildiride; Bölüm 2 de dalgacık ortamında sistem analizi, Bölüm 3 te farklı dalgacık tiplerinin sistem analizi üzerindeki etkileri verilmektedir. Sonuç bölümünde ise kısaca elde edilen sonuçlardan söz edilmektedir.

2. DALGACIK ORTAMINDA SİSTEM ANALİZİ

Dalgacıklar $L^2(R)$ Hilbert uzayının temel fonksiyonları olmalarından dolayı, frekans bandı genişliği sonlu olan bir $f(t) \in L^2(R)$ fonksiyonun dalgacık açılımı

$$f(t) = \sum_k c_{J,k} \varphi_{J,k}(t) \quad (1)$$

şeklinde yazılır [8]. Bu açılımda J parametresi $f(t)$ fonksiyonunun ifade edildiği çok çözünürlük uzayının derinlik değerinin ifade etmektedir [8, 9]. $c_{J,k}$ katsayıları $f(t)$ ' nin $\varphi_{J,k}(t)$ fonksiyonu ile iç çarpımından elde edilir.

$$c_{J,k} = \langle f(t), \varphi_{J,k}(t) \rangle$$

Dalgacıkların temel fonksiyon olma özelliği kullanılarak $x(t)$ girdiyi $y(t)$ çıktıyı ve T ise lineer operatörü göstermek üzere zaman ortamında tanımlanan

$$y(t) = T\{x(t)\} \quad (2)$$

girdi-çıktı ilişkisi dalgacık ortamında cebirsel matris-vektör ilişkisine dönüştürülerek

$$\mathbf{y} = \mathbf{Tx} \quad (3)$$

şeklinde yazılır. Burada $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{x}$ vektörleri $y(t)$ ve $x(t)$ fonksiyonlarının dalgacık vektörleri iken $\mathbf{T}$ matrisi $y(t)$ ve $x(t)$ fonksiyonları arasındaki ilişkiyi gösteren lineer T operatörünün dalgacık ortamındaki karşılığıdır. T operatörü türev, integral vb bir lineer operatöre karşılık gelebilir. Örnek olarak $y(t)$ ve $x(t)$ fonksiyonları arasındaki ilişki

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \text{ veya } y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$$

şeklinde ise, bu ilişkilerin dalgacık ortamındaki karşılığı

$$\mathbf{y} = \mathbf{Dx} \text{ ve } \mathbf{y} = \mathbf{Px}$$

şeklindedir. $\mathbf{D}$ ve $\mathbf{P}$ matrisleri sırasıyla türev ve integral operatörlerinin dalgacık ortamındaki operatör matrisleridir. Dalgacık operatör matrislerinin türetimi [6, 7] nolu kaynaklarda verilmektedir.

3. SİSTEM ANALİZİNDE FARKLI DALGACIKLARIN ETKİLERİ

Dalgacık ortamında zamanla değişen lineer sistemlerin analizi, seçilen dalgacığın tipine ve çok çözünürlük analizinin derinlik değerine göre etkilenmektedir. Derinlik değerinin arttırılması ile sistem parametrelerinin dalgacık ortamında daha kesin bir şekilde ifade edilmesi mümkündür. Böylece elde edilen dalgacık çözümü sistem çözümünün daha iyi ifade edilmesini sağlar. Bu etkileri göstermek üzere dalgacık ortamında ZDLS analizini basit bir örnek üzerinde gösterelim.

ZDLS girdi ($x(t)$) çıktı ($y(t)$) ilişkisini ifade eden diferansiyel denklem ve başlangıç değerleri aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\frac{1}{t+1}\frac{d}{dt} y(t) + y(t) = u(t) \quad \text{ve} \quad y(0) = 0 \quad (4)$$

sistemin analitik çözümü

$$y(t) = 1 - e^{(-\frac{t^2}{2} - t)} \qquad t \geq 0$$

Denklem (4) de verilen sistem denklemi dalgacık ortamında

$$(\mathbf{MD} + \mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{u} \quad (5)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{I}$ matrisleri sırasıyla $(1/t+1)$ fonksiyonun çarpım matrisini, türev matrisi ve birim matrisi gösterirken $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{u}$ vektörleri $x(t)$ ve $u(t)$ fonksiyonlarının dalgacık katsayılarından oluşan dalgacık vektörleridir. Cebirsel matris-vektör ilişkisinin çözümü kolaylıkla

$$\mathbf{y} = (\mathbf{MD} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{u} \quad (6)$$

olarak elde edilir. Dalgacık çıkış vektörü $\mathbf{y}$, zaman ortamına

$$y(t) = \sum_k y_{J,k} \varphi_{J,k}(t) \quad (7)$$

ifadesi ile dönüştürülür. Metodun etkinliğini gözlemleyebilmek için elde edilen çözüm ile analitik çözüm karşılaştırılarak toplam yüzdelik hata

$$e_{total} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \left| f_{exact}(n) - f_{approx}(n) \right|}{\sum_{n=1}^{N} \left| f_{exact}(n) \right|} x100 \quad (8)$$

bağıntısı ile hesaplanır. Bu bağıntıda f_{exact} sistemin analitik çözümünü, f_{approx} sistemin dalgacık ortamında elde edilen çözümünü göstermektedir. Denklem (8) deki toplamların üst sınırı olan N çözüm aralığında kullanılan örnek noktaların toplam sayısıdır. (4) denkleminin farklı derinlik değerleri ve dalgacık türleri için elde edilen çözümler ile analitik çözüm arasındaki toplam hatanın yüzdelik değerleri Tablo 1 ve Tablo 2 de gösterilmiştir.

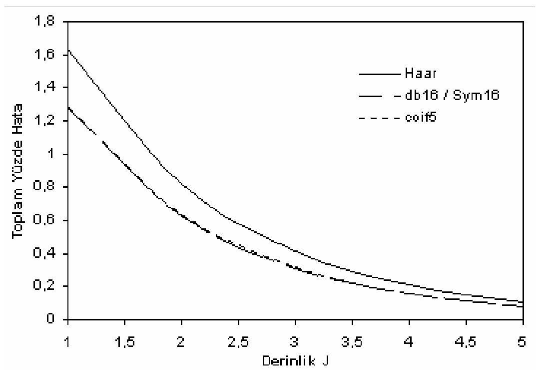
Derinlik J	Toplam Yüzdelik Hata				
	Haar	db2 Sym2	db4 Sym4	db8 Sym8	db16 Sym16
1	1.63	1.43	1.35	1.31	1.28
2	0.82	0.71	0.67	0.64	0.63
3	0.41	0.36	0.34	0.32	0.31
4	0.21	0.18	0.17	0.16	0.16
5	0.11	0.09	0.08	0.08	0.08

Tablo 1: Haar, Daubechies ve Symlets dalgacıkları için toplam yüzdelik hata

Derinlik J	Toplam Yüzdelik Hata				
	coif 1	coif 2	coif 3	coif 4	coif 5
1	1.45	1.34	1.32	1.30	1.29
2	0.71	0.67	0.65	0.64	0.64
3	0.36	0.33	0.33	0.32	0.32
4	0.18	0.17	0.17	0.16	0.16
5	0.09	0.08	0.08	0.08	0.07

Tablo 2: Coiflets dalgacığı için toplam yüzdelik hata

Tablo 1 ve Tablo 2 de görüldüğü gibi derinlik değerinin artırılması toplam yüzdelik hatayı yaklaşık olarak % 50 azaltmaktadır. Bununla beraber dalgacığın moment değerinin arttırılmasının metodun performansı üzerindeki etkisinin sınırlı olduğu görülmektedir. Şekil 1 de görüldüğü gibi Coiflets dalgacığının performansı Daubechies ve Symlets dalgacığından yüksek iken Haar dalgacığı en düşük performansı vermektedir. Symlets ve Daubechies dalgacıklarının aynı sonuçları vermesinin nedeni bu iki dalgacığın alçak geçiren analiz filtrelerinin aynı katsayılara sahip olmasıdır.



Şekil 1: Haar, Db16, Sym16, Coif5 dalgacıkları için toplam yüzde hata.

3. SONUÇ

Bu çalışmada zamanla değişen lineer sistemlerin dalgacık ortamında çözüm metodunun farklı türdeki kısmi tanımlı dalgacıklar için performans analizi yapılmıştır. Yapılan çalışma neticesinde Coiflets dalgacığının en iyi performansı verdiği görülmüştür. Ayrıca çok-çözünürlük analizinin derinlik değerinin de metodun performansı üzerinde etkili olduğu görülmüştür. Çözünürlük değerinin arttırılmasının metodun performansını arttırdığı gözlemlenmiştir. Bu konudaki çalışmalar farklı sistemlere uygulanmak üzere devam etmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Donoho D. L., De-noising by soft-thresholding, IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, Vol 41, No 3, pp 613-627, May 1995

[2] Aldroubi A., Unser M., *Wavelets in Medicine and Biology*, CRC PRESS, Boca Raton, 1996

[3] Xiangqian L., Lin Z., Analysis of Linear Time-varying Systems via Haar Wavelet, REPORT OF TSINGHUA SCIENCE AND TECHNOLOGY, 1999

[4] Hsiao C. H., Wang W. J., State Analysis and Optimal Control of Time-varying Discrete Systems via Haar Wavelets, JOURNAL OF OPTIMIZATION THEORY AND APPLICATIONS, Vol 103, No 3, pp 623-640, 1999

[5] Hsiao C. H., Wang W. J., State Analysis of Time-varying Singular Bilinear Systems via Haar Wavelets, MATEMATIC AND COMPUTERS IN SIMULATION, Vol 52 pp 11-20, 2000

[6] Karci H., Tohumoglu G., Zamanla Değişen Lineer Sistemlerin Dalgacık Analizi ile Çözümü, 11. Elektrik-Elektronik ve Bilgisayar Müh. Ulusal Kongresi ve Fuarı 2, pp 336-340, İstanbul-Türkiye, 2005

[7] Karci H., Tohumoglu G., Linear Time-varying Systems Analysis in Wavelet Domain, ELECTRICAL ENGINEERING ARCHIV FUR ELEKTROTECHNIK, July 2006 (accepted)

[8] Burrus CS, Ramesh A. Gopinath, Haitao Guo, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms A Primer*, PRENTICE HALL, New Jersey, 1998.

[9] Mallat S. G., A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, IEEE TRANS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, Vol.11, no.7, pp. 674-693, 1989.