

Kesirli-Mertebeden $2 \times n$ RLC Ağlarının İletim Matrisleriyle Analizi

Analysis of Fractional-Order $2 \times n$ RLC Networks by Transmission Matrices

Mahmut Ün¹, Manolya Ün², Faruk Sanberk Kızıltı¹

¹Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Biyomedikal Mühendisliği
İstanbul Yeni Yüzyıl Üniversitesi
mahmut.un@yeniyuzyil.edu.tr, fsanberk@gmail.com

²Tıp Fakültesi, Medical University of Plevne, Plevne, Bulgaristan
manolya.un3@gmail.com

Özet

Bu çalışmada, kesirli-mertebeden pasif devre elemanlarıyla modellenmiş bir $2 \times n$ RLC devre ağının dinamik analizi için yeni bir yöntem geliştirilmiş ve sunulmuştur. Önerilen analiz yöntemi, transfer fonksiyonu yaklaşımıyla dinamik analiz prensiplerine dayanmaktadır. İlk aşamada, kesirli-mertebeden $2 \times n$ RLC devre ağı, n eşit hücreden oluşacak şekilde kaskat bağlı parçalara ayrılmıştır ve tanımlanan her bir hücre için iletim matrisleri hesaplanmıştır. Ardından kaskat bağlamaının özellikleri kullanılarak, kesirli-mertebeden bütün devre ağının iletim matrisi bulunmuştur. Sistem içinde bulunan bu iletim matrisleri yardımıyla, devre ağı için tanımlanan transfer fonksiyonu ve giriş empedansı büyüklükleri, hücre sayısı (n) ve kesirli merteye değerlerine bağlı olarak türetilmiştir. Son olarak, hücre sayısı n ve kesirli merteye değerlerine bağlı olarak frekans, basamak ve darbe cevapları yanında, devre empedans karakteristiklerinin gösterimi gibi önemli dinamik analiz incelemeleri MATLAB benzetim programlarıyla yapılmıştır..

Abstract

In this study, a new method is devised and presented for the dynamic analysis of a $2 \times n$ RLC circuit network modeled with the fractional-order circuit elements. This analysis method is based on the principles of dynamic analysis with transfer function approximation. Firstly, the fractional-order $2 \times n$ RLC circuit network of interest is divided into n equal cells connected in cascaded form and related transmission matrices are individually calculated for each cell defined. The transmission matrix of the whole circuit network is then calculated based on the properties of the cascaded connection. By means of this transmission matrix and the two-part connection, diagram circuit functions such as transfer function and the input impedance of the whole circuit network are derived depending on the number of cells (n) and the fractional-order values. Finally, essential dynamic system analyses such as frequency, step and pulse responses, as well as the impedance characteristics of the network are simulated

using necessary MATLAB programs depending on cell number n and the fractional-order values.

1. Giriş

Devre ağları elektriksel sistemler dışında biyolojik ve kimyasal sistemlerin analizi ve modellenmesi amacıyla da kullanılmaktadır [1,2]. Bu yaklaşımın sonucunda, doğada düzlemsel devre ağlarının varlığını gösteren grafenin direnç ağlarının araştırılması, 2010 yılında fizik alanında Nobel ödülüne layık görülmüştür [3,5]. Geçmiş yıllarda entegre devre ağları konularında yapılan yayınların sayısı hızla artmıştır. Bahsi geçen yayınların çoğu, temel konu olarak, tam sayı mertebesinde tek elemanlı devre ağlarının kapasite veya direnç analizi üzerinde yoğunlaşmaktadır [6,7]. Kesirli mertebede çok elemanlı devre ağlarının empedansları konusunda ise, yeterince çalışma yapılmamıştır.

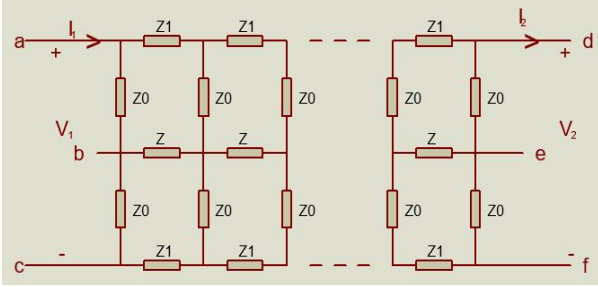
İndüktans ve kapasiteler için geliştirilen kesirli-mertebede matematiksel modeller, benzetimi yapılan sistemin elektriksel karakteristiklerini daha doğru değerlerle ifade edebilir, çünkü gerçek indüktans ve kapasiteler doğal olarak kesirli mertebededir [8]. Kesirli-mertebeden indüktans daha önceki çalışmalarda deri etkisini ve kesirli mertebeden kapasite farklı elektrolitik kapasiteleri modellemede kullanılmıştır [9-11]. Günümüzde, araştırmacılar kesirli mertebeden elektronik elemanların gerçekleştirilmesi ve tasarımı konusunda çalışmalara devam etmektedir [12-16]. Bunun dışında, bazı araştırmacılar kesirli-mertebe devre kuramının teorisi üzerinde yoğunlaşmıştır [17-20]. Yine de göreceli olarak az sayıda araştırmacı, biyolojik sistemlerin kesirli-mertebede modellenmesinde kullanılan $2 \times n$ boyutlu devre ağının elektriksel karakteristikleri konusunda çalışmaktadır.

Bu çalışmada sunacağımız içerik ve yeni analiz yöntemi, araştırmamızı biyolojik sistemleri inceleyen güncelleri arasında ilgi çekici kılmaktadır. İlk aşamada, kesirli-mertebeden bir $2 \times n$ RLC elektrik devresinin transfer fonksiyonu ve eşdeğer empedansının genel formülleri, hücre sayısı n ve kesirli merteye değerlerine bağlı olarak türetilmiştir. Formüllerin türetilmesinde kaskat bağlı hücreler

için iki-kapılı iletişim matrisleriyle analiz yöntemi kullanılmıştır. Sonraki basamakta devrenin transfer fonksiyonu ve eşdeğer empedans karakteristikleri, hücre sayısı n ve kesirli-mertebe değerlerine bağlı olarak MATLAB benzetimleriyle incelenmiştir.

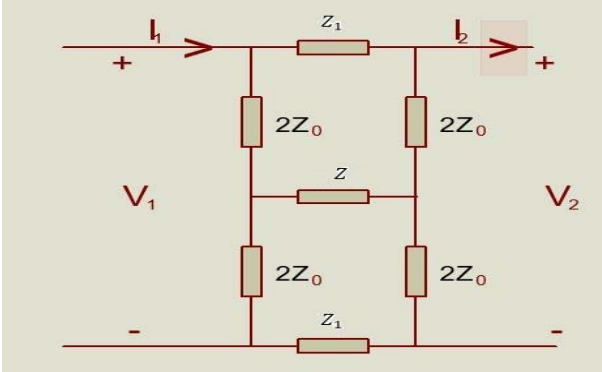
1.1.1. Kesirli Mertebeden $2 \times n$ RLC Devre Ağının İletim Matrisleriyle Analizi

Kesirli mertebeden $2 \times n$ RLC devre ağı için kullanılacak model Şekil 1' de gösterilmiştir. Burada Z_0 dirençleri, Z kesirli mertebeden kapasiteleri ve Z_1 kesirli mertebeden indüktansları göstermektedir:

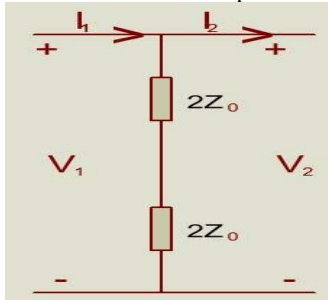


Şekil 1: Kesirli-mertebeden $2 \times n$ RLC devre ağı modeli

Bu bölümde, devre ağının eşdeğer empedans ve transfer fonksiyonu için analitik eşitliklerin elde edilmesinde temel devre ağı kuramı, iki kapılı devrelerin iletişim matrisi ve matris dönüşüm yöntemleri kullanılacaktır. Şekil 1'de gösterilen devre ağı modelinin, Şekil 2a ve Şekil 2b'de gösterilen birim hücre alt devre modellerinin kaskat bağlanmasıyla oluşturulabileceği kolayca doğrulanabilir. Bu alt devre modellerinin her biri için iletişim matrisleri hesaplanarak ve kaskat ağı devreler için eşdeğer iletişim matrisi bulunabilir. Bu eşdeğer iletişim matrisini kullanarak transfer fonksiyonu ve eşdeğer empedans bulunabilir.



Şekil 2a: Temel birim hücre iki kapılı alt devre modeli



Şekil 2b: Giriş ve çıkışta kullanılan iki kapılı alt devre modeli

Şekil 2a'da gösterilen iki kapılı devre için hesaplanan iletişim matrisi:

$$T_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (1)$$

olur. Burada iletişim matrisi parametre değerleri

$$a = \frac{16Z_0^2 + 12Z_0Z_1 + 3Z_1^2 + Z_0Z_1}{4Z_0(4Z_0 + Z_1 + Z_1)}, \quad b = 2Z_1, \quad c = \frac{16Z_0^2 + 12Z_0Z_1 + 3Z_1^2 + Z_0Z_1}{4Z_0(4Z_0 + Z_1)}$$

ve $d = \frac{Z_1}{2Z_0}$ şeklindedir. Şekil 2b'de gösterilen iki kapılı devre için bulunan iletişim matrisi aşağıdaki gibidir:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4Z_0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Kaskat bağlı bütün devre ağı için iletişim matrisi:

$$T = T_2 T_1^n T_2 \quad (3)$$

olur. Burada:

$$T_1^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

bir matrisin n . kuvveti olarak tanımlansın. Cayley-Hamilton teoremine göre, eğer T_1 (2×2) boyutunda bir matris ve I birim matris olduğuna göre:

$$T_1^n = \alpha_0 I + \alpha_1 T_1 \quad (5)$$

olur. Burada α_0 ve α_1 katsayıları:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 \lambda_1^n - \lambda_1 \lambda_2^n \\ \lambda_2^n - \lambda_1^n \end{bmatrix} \quad (6)$$

ile bulunur. Burada λ_1 ve λ_2 , T_1 matrisinin tekrarlı olmayan öz değerleridir. Denklem (2)'deki T_2 ve denklem (4)'teki T_1^n değerleri, denklem (3)'te yerine konulursa:

$$T = \begin{bmatrix} a_n + \frac{b_n}{4Z_0} & b_n \\ \frac{b_n}{16Z_0^2} + \frac{a_n + b_n}{4Z_0} + c_n & \frac{b_n}{4Z_0} + d_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

elde edilir. Bütün devre ağı için hesaplanan iletişim matrisinden eşdeğer empedans ve transfer fonksiyonu iki kapılı devre parametrelerinden kolayca bulunabilir. Eşdeğer empedans ve transfer fonksiyonu sırayla:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{4Z_0\alpha_n + b_n}{\frac{b_n}{4Z_0} + \alpha_n + b_n - 4Z_0\alpha_n} \quad (8)$$

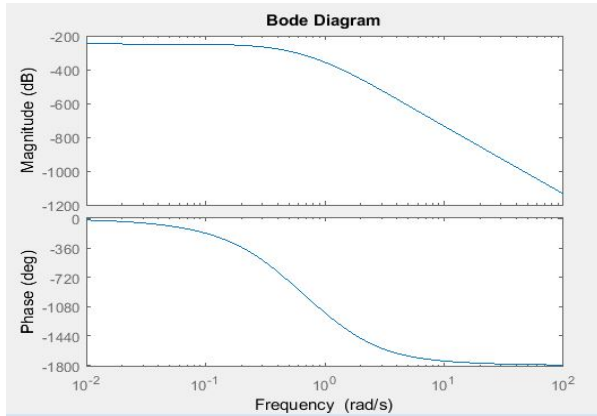
ve:

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{4Z_0}{4Z_0\alpha_n + b_n} \quad (9)$$

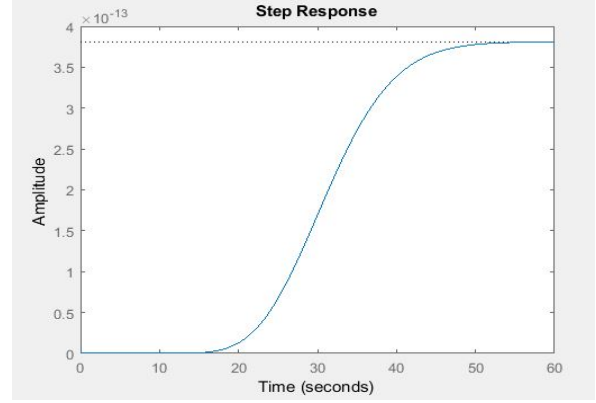
olur. Sonuç olarak, devre ağının dinamik analizinde kullanılacak olan eşdeğer empedans ve transfer fonksiyonu açık analitik eşitliklerle elde edilmiştir. Bu eşitlikler hücre sayısı n ve kesirli mertebeden devre elemanlarının kesirli mertebelerine bağlı olarak elde edilmiştir.

2. MATLAB Benzetimleri

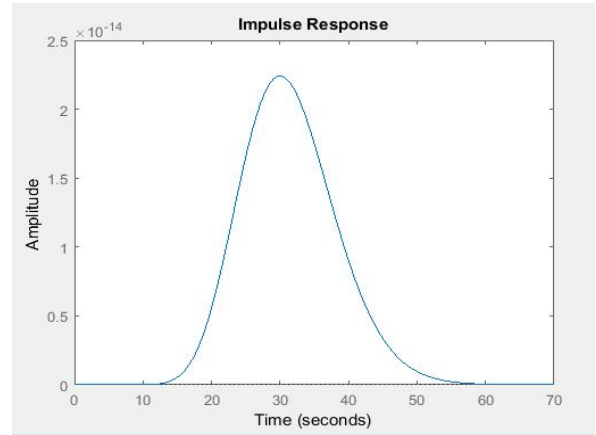
MATLAB benzetimlerinde $n=10$ hücreli bir ağ kullanılacaktır. Önce devre ağının eşdeğer empedansı ve transfer fonksiyonu sembolik programlamayla bulunacak, daha sonra kesirli mertebeden elemanlar için literatürde verilen yaklaşımlar kullanılarak, transfer fonksiyonu ve eşdeğer empedans rasyonel fonksiyonlar şeklinde elde edilmiştir. MATLAB benzetimleriyle devre ağının empedans karakteristikleri ve transfer fonksiyonunun frekans yanıtı, basamak ve darbe yanıtları incelenecektir. Kesirli domende önerilen ağ parametreleri; $Z_0 = 1$, $n = 10$, $\alpha = \beta = 0.5$ değerleri, $s^{0.5} = (3*s + 1) / (s + 3)$ ve $s^{(-0.5)} = (s + 3) / (3*s + 1)$ yaklaşımları kullanılmıştır [14]. Önce denklem (9)'da verilen transfer fonksiyonunun MATLAB benzetiminde sırayla frekans, basamak ve darbe yanıtları elde edilmiştir. Bu yanıtların grafikleri sırayla Şekil 3a, 3b ve 3c'de gösterilmiştir.



Şekil 3a: Transfer fonksiyonunun frekans yanıtı

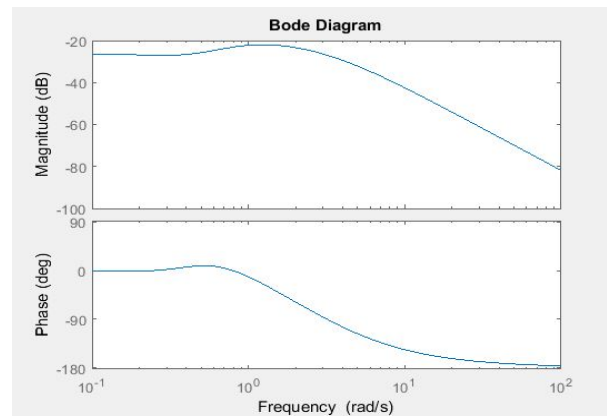


Şekil 3b: Transfer fonksiyonunun basamak yanıtı

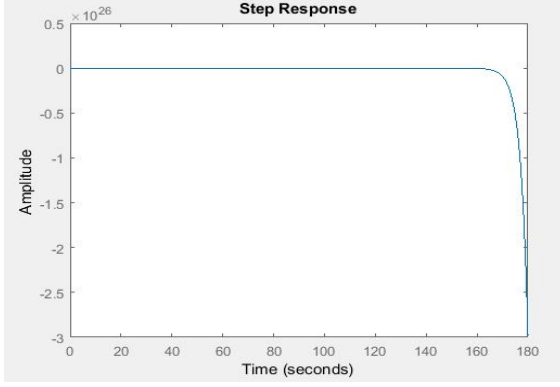


Şekil 3c: Transfer fonksiyonunun darbe yanıtı

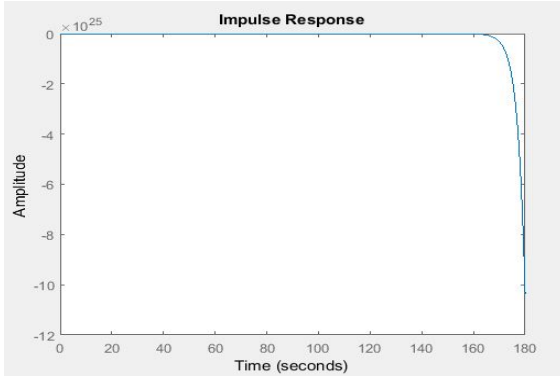
Daha sonra yine aynı parametre değerleri için denklem (8)'de verilen eşdeğer empedansın MATLAB benzetimleriyle daha önce yapılan analizler tekrarlanmıştır. Eşdeğer empedans için elde edilen frekans, basamak ve darbe yanıtları sırayla Şekil 4a, 4b ve 4c'de gösterilmiştir.



Şekil 4a: Eşdeğer empedansın frekans yanıtı



Şekil 4b: Eşdeğer empedansın basamak yanıtı



Şekil 4c: Eşdeğer empedansın darbe yanıtı

3. Sonuçlar

2xn boyutlu RLC devre ağ modeli iki-kapılı iletişim matrisi yöntemiyle analiz edilerek, ağın matematiksel modelinin elde edilmesinde transfer fonksiyonu yaklaşımı kullanılmıştır. Elektriksel ağın dinamik analizi için, transfer fonksiyonu ve eşdeğer empedans değerleri, analitik açık ifadeler olarak elde edilmiştir. Ağ modelinde lineer olmayan kesirli mertebeden elemanlar bulunmasına rağmen, Laplace transformunun özelliklerini kullanarak, transfer fonksiyonu yaklaşımı kullanılarak ağın dinamik analizi yapılmıştır. Önerilen ağ için yapılan MATLAB benzetimleri sonuçlarıyla, ağın istenilen başarımı test edilmiştir. Ayrıca modelde kullanılan hücre sayısına, kesirli mertebe değerine bağlı olarak ağın başarımı, önerilen model yardımıyla kolayca incelenebilir. Bu incelemeler daha sonraki çalışmalar için düşünülmektedir.

4. Kaynaklar

- [1] Von Busse V, Swartz S. M., and C. C. Voigt C. C., "Flight metabolism in relation to speed in Chiroptera: Testing the U-shape paradigm in the short-tailed fruit bat *Carollia perspicillata*," *J. Exp. Biol.*, vol. 216, no. 11, pp. 2073–2080, 2013.
- [2] Simpson R., Jaques A., Nunez, C.H., Ramirez, and Almonacid A., "Fractional calculus as a mathematical tool to improve the modeling of mass transfer phenomena in food," *Food Eng. Rev.*, vol. 5, no. 1, pp. 45–55, 2013.

- [3] Bolotin K. I., Ghahari F., Shulman M. D., Stormer H. L., and Kim P., "Observation of the fractional quantum Hall effect in graphene," *Nature*, vol. 475, pp. 7354, Jul. 2011.
- [4] Feldman B. E., Krauss B., Smet J. H., and Yacoby A., "Unconventional sequence of fractional quantum hall states in suspended graphene," *Science*, vol. 337, no. 6099, pp. 1196–1199, Sep. 2012.
- [5] Owaidat M. Q., Hijjawi R.S. and Khalifeh J.M., "Network with two extra interstitial resistor", *Int. J. Theor. Phys.*, Vol: 10, p: 3152 – 3159, 2012.
- [6] Yao N. Y., Gorshkov A. V., Laumann C. R., Lauchli, J. Ye, and Lukin M. D., "Realizing fractional Chern insulators in dipolar spin systems," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, no. 18, 2013.
- [7] Hijjawi R.S., Assad J.H and Sakaji H.J, "Perturbation of an infinite network of identical capacitors", *Int. J. Mod. Phys.*, Vol: B2, p: 199 – 209, 2007.
- [8] Carlson G. and Halijaj C., "Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{\alpha}$ by regular Newton process", *IEEE T. Circuit Syst.*, p: 210 – 213. 1964.
- [9] Westerlund S. and Ekstam L, "Capacitor theory", *IEEE T. Dielectr. Insulat.*, Vol: 5, p: 826, 1994.
- [10] Westerlund S., "Dead Matter has Memory, Causal Consulting Kalmar", Sweden, 2002.
- [11] Tenreiro M.J.A. and Galhano A.M.S.F., "Fractional order inductive phenomena based on the skin effect", *Nonlinear Dyn.*, Vol: 1-2, p: 107 – 115. 2012.
- [12] Radwan A. G. and Salama K. N., "Passive and active elements using fractional circuit", *IEEE T. Circuits-I*, Vol: 10, p: 2388 – 2397, 2011.
- [13] Das S., Sivaramakrishna M., Biswas K and Goswami B., "Performance study of a constant phase angle based impedance sensor to detect milk adulteration, sensors and actuators", *A-Physical*, Vol: 2, p: 273-278, 2011.
- [14] Krishna M.S., Das S., Biswas K and Goswami, B. "Fabrication of a fractional order capacitor with desired specifications; A study on process identification and characterization", *IEEE Trans. Electron Dev.*, Vol: 11, p: 4067 – 4073, 2011.
- [15] Haba T., Ablart G., Camps T. and Olivie F., "Influence of the electrical parameters on the input impedance of a fractal structure realised on silicon", *Chaos Solitons Fract.*, Vol: 2, p: 479 – 490, 2005.
- [16] Elshurafa A.M., Almadhoun M.N., Salama K.N. and Alshareet H.N., "Microscale electrostatic fractional capacitors using reduced graphene oxide percolated polymer composites", *Appl. Phys. Lett.*, Vol: 23, 2013.
- [17] Radwan A.G. and Salama K.N., "Fractional – order RC and RL circuit", *Circuits Syst. Signal Process*, Vol:6, p: 1901 – 1915, 2012.
- [18] Jia H.Y., Chen Z.Q. and Qi G.Y., "Topological horseshoe analysis and circuit realization for a fractional-order Lu system", *Nonlinear Dynam.*, Vol: 1 – 2, p: 203 – 212, 2013.
- [19] Chen P. and He S. B., "Analysis of the fractional-order parallel tank circuit", *J. Circuits sys. Comput.*, Vol: 6, 2013.
- [20] Maundy B., Elwakil A.S. and Freeborn T.J., "On the practical realization of higher order filters with fractional stepping", *Signal Process*, Vol: 3, p:484 - 491, 2011.