AYRIK $\mathcal{H}_\infty$ MODEL EŞLEME PROBLEMİNİN ÇİFT SERBESTLİK DERECELİ STATİK ÇIKIŞ GERİBESLEMESİ İLE ÇÖZÜMÜ

Murat AKIN **Atilla BİR**

Elektrik Mühendisliği Bölümü
Elektrik-Elektronik Fakültesi
İstanbul Teknik Üniversitesi, Maslak/İstanbul
murakin@elk.itu.edu.tr abir@elk.itu.edu.tr
Fax: (+90) 212 285 67 00

ÖZET

Bu bildiride $\mathcal{H}_\infty$ model eşleme problemi çift serbestlik dereceli (Two Degrees of Freedom-2 DOF) statik çıkış çıkış geribeslemesi ile çözülmeye çalışılmıştır. Problem önce $\mathcal{H}_\infty$ optimal kontrol problemine indirgenmiş, ardından problemin çözümünü veren gerek ve yeter şartlar olabildiği kadar basitleştirilerek elde edilmeye çalışılmıştır. Daha sonra sentez teoremi ve ondan çıkarılan kontrolör tasarım algoritması bir örnek üzerinde denenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Model Eşleme Problemi, Doğrusal Matris Eşitsizlikleri, $\mathcal{H}_\infty$ Optimal Kontrol, Çift Serbestlik Dereceli Statik Çıkış Geribeslemesi

1 GİRİŞ

$G(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ kontrol edilmek istenen sistemin kararlı açık çevrim transfer fonksiyonları matrisi, $G_m(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ ise kontrol edilen sisteme kapalı çevrimli durumda kazandırmak istediğimiz davranış ölçütlerini sağlayan, diğer bir deyişle uygun sıfır-kutup dağılımına sahip bir model sistemin kararlı transfer fonksiyonları matrisini ifade etsin. Standart ayrık $\mathcal{H}_\infty$ model eşleme problemi,

$$\gamma_{opt} = \inf_{R(z) \in \mathcal{RH}_\infty} \|G_m(z) - G(z)R(z)\|_\infty \tag{1}$$

ifadesi ile eniyilemek anlamına gelir. Buna göre bir $R(z)$ kontrolörü yardımıyla $G(z)$, $G_m(z)$'ye γ_{opt}'in büyüklüğüne göre eşlenmek istenir.

Ayrık transfer fonksiyonları matrisi $G(z)$'nin $\mathcal{H}_\infty$ normu,

$$\|G(z)\|_\infty = \sup_{\omega \in [0;2\pi]} \sigma_{max}(G(e^{j\omega})) \tag{2}$$

ilişkisi ile tanımlanır. Burada σ_{max}, maksimum tekil değeri göstermektedir.

Standart $\mathcal{H}_\infty$ model eşleme problemi daha önce pek çok farklı yaklaşımla incelenmiştir [5,7,8,12,13]. Sözü edilen çalışmaların tümünde $R(z)$ bir önkontrolör olarak yer alır ve sistem çift serbestlik dereceli dinamik durum geribeslemesi şeklinde gerçeklenir [12].

Ayrıca $\mathcal{H}_\infty$ model eşleme probleminin, doğrusal matris eşitsizlikleri yaklaşımından yararlanılarak sürekli sistemler için çift serbestlik dereceli dinamik durum geribeslemesi şeklinde çözümü [11]'de, ayrık sistemler için çift serbestlik dereceli statik durum geribeslemesi şeklinde çözümü [4]'de, ayrık ve sürekli sistemler için tek serbestlik dereceli statik durum geribeslemesi ile çözümü [1,2]'de ve ayrık sistemler için tek serbestlik dereceli statik çıkış geribeslemesi ile çözümü ise [3]'de verilmiştir.

Bu çalışmada, daha önce herhangi bir yöntemle çözüldüğü bilinmeyen, ayrık $\mathcal{H}_\infty$ model eşleme problemi çift serbestlik dereceli statik çıkış geribeslemesi ile önce ayrık $\mathcal{H}_\infty$ optimal kontrol problemine indirgenmekte, daha sonra doğrusal matris eşitsizlikleri yaklaşımı ile çözülmekte ve kontrolör tasarımı için bir algoritma önerilmektedir.

Çalışmada, $KerM$ ve ImM, sırasıyla M matrisinin sıfır ve görüntü uzaylarını; N^T, N matrisinin transpozesini ve $P > 0$ ise P matrisinin positif tanımlı (positive definite) olduğunu ifade edecektir.

2 AYRIK $\mathcal{H}_\infty$ MODEL EŞLEME PROBLEMİNİN AYRIK $\mathcal{H}_\infty$ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNE İNDİRGENMESİ

Şekil.1'de ayrık $\mathcal{H}_\infty$ model eşleme probleminin çift serbestlik dereceli statik çıkış geribeslemesi ile çözülmesini sağlayacak blok diyagramı görülmektedir. Burada, $G(z)$ kontrol edilmek istenen sistem, $G_m(z)$ ise model sistemin transfer fonksiyonları matrisidir. Aşağıda bu matrislere ilişkin herhangi durum uzayı modelleri görülmektedir:

$$G(z): \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu \tag{3}$$

$$y_s(k) = Cx(k) \tag{4}$$

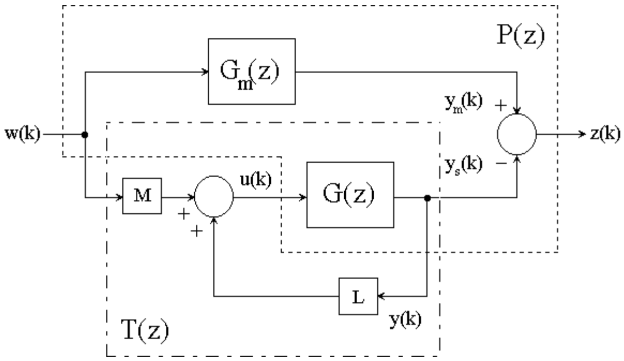
$$G_m(z): \quad q(k+1) = Fq(k) + Gw(k) \tag{5}$$

$$y_m(k) = Hq(k) + Jw(k). \tag{6}$$

İşlemlerin kolaylaşması için şimdilik kontrol edilmek istenen sistem kesin düzgün (strictly proper yani $D = 0$) alınmıştır. $x(k) \in \mathcal{R}^{n_s}$, $q(k) \in \mathcal{R}^{n_m}$, $u(k) \in \mathcal{R}^m$, $w(k) \in \mathcal{R}^m$, $y_m(k) \in \mathcal{R}^p$, $y_s(k) \in \mathcal{R}^p$ özelliklidir ve kontrol işareti $u(k)$,

$$u(k) = Ly_s(k) + Mw(k) \tag{7}$$

şeklinde geribeslenmektedir.



Şekil.1

$P(z)$ sisteminin durum uzayı modeli şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x(k+1) \\ q(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} w(k) \\
&+ \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad (8)
\end{aligned}$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} -C & H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix} + Jw(k) \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}
y(k) &= \begin{bmatrix} y_s(k) \\ w(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w(k). \qquad (10)
\end{aligned}$$

İşlemleri basitleştirmek için aşağıdaki matrisleri tanımlayalım:

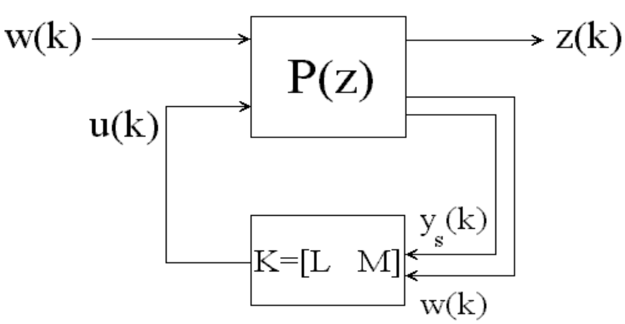
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0_{n_s\times m} \\ G \end{bmatrix} \qquad (11)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_m\times m} \end{bmatrix} \qquad C_1 = \begin{bmatrix} -C & H \end{bmatrix} \qquad (12)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0_{m\times n_m} \end{bmatrix} \qquad D_1 = J \qquad (13)$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0_{p\times m} \\ I_m \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Şekil.2'de de görüldüğü gibi çift serbestlik dereceli statik çıkış geribeslemeli ayrık $\mathcal{H}_\infty$ model eşleme problemi, ayrık $\mathcal{H}_\infty$ optimal kontrol problemine eşdeğerdir:



Şekil.2

Şekil.1 ve 2'deki sistemin $w(k)$'dan $z(k)$'ya kapalı çevrim transfer fonksiyonları matrisi,

$$\begin{aligned}
A_{cl} &= \underline{A} + B_2KC_2 & (15)\\
B_{cl} &= B_1 + B_2KD_2 & (16)\\
C_{cl} &= C_1 & (17)\\
D_{cl} &= D_1 & (18)
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$T_{zw}(z) = D_{cl} + C_{cl}(zI - A_{cl})^{-1}B_{cl} \qquad (19)$$

şeklinde elde edilir.

Problemi çözen sentez teoremini elde etmeden önce tanıt içinde kullanılacak bazı lemmaları vermek yerinde olur. Ayrık $\mathcal{H}_\infty$ optimal kontrol problemi ile doğrusal matris eşitsizlikleri arasındaki bağlantıyı aşağıdaki **Ayrık Sınırlı Gerçek Lemma** sağlar:

Lemma 2.1 *Eğer $T(z)$ sisteminin kontroledilebilir veya gözlenebilir olması gerekmeyen bir gerçeklemesi (A, B, C, D) ise, aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:*

i) *$\|D + C(zI - A)^{-1}B\|_\infty < \gamma$ ve A Hurwitz'dir, yani A'nın tüm özdeğerleri z düzleminde birim çemberin içindedir.*

ii) *Aşağıdaki doğrusal matris eşitsizliğini çözen*

$$\begin{bmatrix} -X^{-1} & A & B & 0 \\ A^T & -X & 0 & C^T \\ B^T & 0 & -\gamma I & D^T \\ 0 & C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \qquad (20)$$

bir $X > 0$ matris vardır.

Tanıt: [6]. ■

Lemma 2.2 *P ve Q herhangi , H ise simetrik bir matris olsun. N_P matrisi $ImN_P = KerP$ ve N_Q matrisi $ImN_Q = KerQ$ özelliğini sağlayan tam kolon ranklı matrisler olmak üzere,*

$$H + P^T\Omega^TQ + Q^T\Omega P < 0 \qquad (21)$$

doğrusal matris eşitsizliğini sağlayan bir Ω matrisinin var olması, ancak ve ancak aşağıdaki koşulların sağlanması halinde mümkündür:

$$N_P^THN_P < 0 \qquad ve \qquad N_Q^THN_Q < 0. \qquad (22)$$

Tanıt: [9]. ■

3 PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Yukarıda tanımlanan ayrık $\mathcal{H}_\infty$ model eşleme problemini, çift serbestlik dereceli statik çıkış geribeslemesi ile çözen **sentez teoremi**, şu şekilde ifade edilebilir:

Teorem 3.1 *Şekil.2'deki sistemin çift serbestlik dereceli statik çıkış geribeslemesi ile, A_{cl} matrisinin asimptotik kararlı ve $\|T_{zw}(z)\|_\infty < \gamma$ olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\begin{bmatrix} N_o & 0 & 0 \\ 0 & I_{nm} & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}^T X \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} - X & \begin{pmatrix} -C^T \\ H^T \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -C & H \end{pmatrix} & -\gamma I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_o & 0 & 0 \\ 0 & I_{nm} & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} < 0 \qquad (23)$$

$$\begin{bmatrix} N_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{nm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} X^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}^T - X^{-1} & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} X^{-1} \begin{pmatrix} -C^T \\ H^T \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -C & H \end{pmatrix} X^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}^T & -\gamma I_p + \begin{pmatrix} -C & H \end{pmatrix} X^{-1} \begin{pmatrix} -C^T \\ H^T \end{pmatrix} & J \\ \begin{pmatrix} 0 & G^T \end{pmatrix} & J^T & -\gamma I_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{nm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} < 0 \qquad (24)$$

doğrusal matris eşitsizliklerini çözen, bir $X > 0$ matrisinin bulunmasıdır. N_c ve N_o tam ranklı ve

$$\begin{aligned}
ImN_c &= KerB^T & (25)\\
ImN_o &= KerC & (26)
\end{aligned}$$

özellikli matrislerdir.

Tanıt: Şekil.2'deki sisteme Ayrık Sınırlı Gerçek Lemma uygulanırsa, $\|T_{zw}(z)\|_\infty < \gamma$ koşulunu sağlayan

$$K = \begin{bmatrix} L & M \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{m\times(p+m)} \tag{27}$$

şeklinde çift serbestlik dereceli statik çıkış geribeslemesinin gerek ve yeter varlık koşulu

$$\begin{bmatrix} -X^{-1} & A_{cl} & B_{cl} & 0 \\ A_{cl}^T & -X & 0 & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T & 0 & -\gamma I & D_{cl}^T \\ 0 & C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{28}$$

doğrusal matris eşitsizliğini sağlayan bir $X > 0$ matrisinin varlığına eşdeğerdir. (15), (16), (17) ve (18)'deki A_{cl}, B_{cl}, C_{cl} ve D_{cl} ifadelerini kullanırsak, yukarıdaki doğrusal matris eşitsizliği,

$$H_X = \begin{bmatrix} -X^{-1} & \underline{A} & B_1 & 0 \\ \underline{A}^T & -X & 0 & C_1^T \\ B_1^T & 0 & -\gamma I_m & D_1^T \\ 0 & C_1 & D_1 & -\gamma I_p \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0_{(p+m)\times(n_s+n_m)} & C_2 & D_2 & 0_{(p+m)\times p} \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$P = \begin{bmatrix} B_2^T & 0_{m\times(n_s+n_m)} & 0_m & 0_{m\times p} \end{bmatrix} \tag{31}$$

olmak üzere

$$H_X + P^T K Q + Q^T K^T P < 0 \tag{32}$$

biçimine indirgenebilir. Lemma 2.2'den, K matrisinin varlığı için gerek ve yeter koşul,

$$ImN_P = KerP \tag{33}$$

$$ImN_Q = KerQ \tag{34}$$

$$X > 0 \tag{35}$$

olmak üzere,

$$N_P^T H_X N_P < 0 \quad and \quad N_Q^T H_X N_Q < 0 \tag{36}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan (31) ifadesinden

$$N_P = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_s+n_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \tag{37}$$

yazılabilir. Buna göre $N_P^T H_X N_P < 0$ eşitsizliği,

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_s+n_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -X^{-1} & \underline{A} & B_1 & 0 \\ \underline{A}^T & -X & 0 & C_1^T \\ B_1^T & 0 & -\gamma I_m & D_1^T \\ 0 & C_1 & D_1 & -\gamma I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_s+n_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} < 0 \tag{38}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{A}X^{-1}\underline{A}^T - X^{-1} & B_1 & \underline{A}X^{-1}C_1^T \\ B_1^T & -\gamma I_m & D_1^T \\ C_1X^{-1}\underline{A}^T & D_1 & -\gamma I_p + C_1X^{-1}C_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} < 0 \tag{39}$$

veya

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{A}X^{-1}\underline{A}^T - X^{-1} & \underline{A}X^{-1}C_1^T & B_1 \\ C_1X^{-1}\underline{A}^T & -\gamma I_p + C_1X^{-1}C_1^T & D_1 \\ B_1^T & D_1^T & -\gamma I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} < 0 \tag{40}$$

biçimine indirgenir. (24) doğrusal matris eşitsizliği, (11), (12), (13) ve (14) ifadeleri (40)'da kullanılarak elde edilir. Diğer taraftan

$$ImN_Q = Ker\begin{bmatrix} 0_{(p+m)\times(n_s+n_m)} & C_2 & D_2 & 0_{(p+m)\times p} \end{bmatrix}$$

$$= Ker\begin{bmatrix} 0_{p\times(n_s+n_m)} & C & 0_{p\times n_m} & 0_{p\times m} & 0_{p\times p} \\ 0_{m\times(n_s+n_m)} & 0_{m\times n_s} & 0_{m\times n_m} & I_m & 0_{m\times p} \end{bmatrix} \tag{41}$$

olduğundan

$$N_Q = \begin{bmatrix} I_{n_s+n_m} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{m\times p} \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \tag{42}$$

yazılabilir. Nihayet $N_Q^T H_{X_{cl}} N_Q < 0$ koşulu da

$$\begin{bmatrix} I_{n_s+n_m} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{m\times p} \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -X^{-1} & \underline{A} & B_1 & 0 \\ \underline{A}^T & -X & 0 & C_1^T \\ B_1^T & 0 & -\gamma I_m & D_1^T \\ 0 & C_1 & D_1 & -\gamma I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_s+n_m} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{m\times p} \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} < 0 \tag{43}$$

şekline getirilebilir. İspatı tamamlamak için (11), (12), (13) ve (14) ifadelerini (43) doğrusal matris eşitsizliğinde yerine koymak yeterlidir:

$$\begin{bmatrix} I_{n_s+n_m} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{m\times p} \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}^T$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -X^{-1} & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}^T & -X & 0 & \begin{pmatrix} -C^T \\ H^T \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & G^T \end{pmatrix} & 0 & -\gamma I_m & J^T \\ 0 & \begin{pmatrix} -C & H \end{pmatrix} & J & -\gamma I_p \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} I_{n_s+n_m} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{m\times p} \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} < 0. \tag{44}$$

Yani

$$\begin{bmatrix} I_{n_s+n_m} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -X^{-1} & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}^T & -X & \begin{pmatrix} -C^T \\ H^T \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} -C & H \end{pmatrix} & -\gamma I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_s+n_m} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I_{n_m} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} < 0 \tag{45}$$

veya

$$\begin{bmatrix} N_o & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_m} & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}^T X \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} - X & \begin{pmatrix} -C^T \\ H^T \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -C & H \end{pmatrix} & -\gamma I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_o & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_m} & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} < 0 \tag{46}$$

yazılabilir. ■

4 KONTROLÖR TASARIMI

Teorem 3.1, çift serbestlik dereceli statik çıkış geribeslemeli ayrık $\mathcal{H}_\infty$ model eşleme probleminin çözülebilirlik koşullarını verdiği gibi kontrolör tasarımında da kullanılabilir:

Adım 1: γ_{opt} için (23) ve (24) doğrusal matris eşitsizliklerini aynı anda sağlayan bir $X > 0$ matrisi, "The LMI Control Toolbox" [10] kullanılarak belirlenir.

Adım 2: (32) doğrusal matris eşitsizliği çözülerek çift serbestlik dereceli statik çıkış geribesleme matrisi $K \in \mathcal{R}^{m\times(p+m)}$ elde edilir.

5 ÖRNEK

Asimptotik kararlı olmayan

$$G(z) = \frac{z+1}{(z-1,2)(z+0,5)} \tag{47}$$

sistemini

$$G_m(z) = \frac{0,5}{z-0,5} \tag{48}$$

konum hatasına sahip olmayan model sistemine eşlemeye çalışalım:

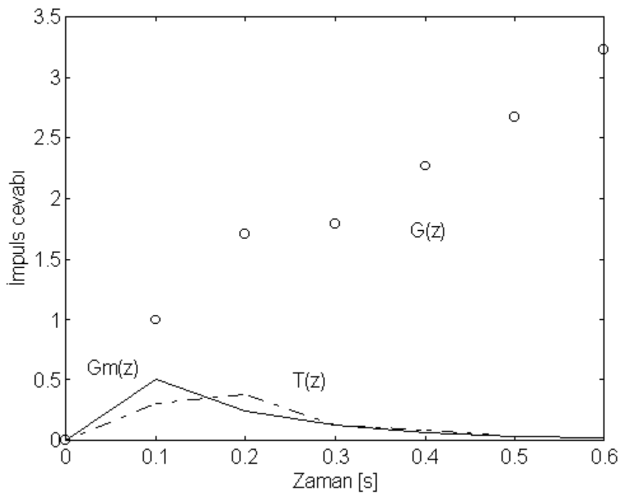
Kontrolör tasarımı için önerilen algoritma kullanılırsa kontrolör ve model eşlemeye ait simülasyon sonuçları aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\gamma_{opt} = 1,559 \tag{49}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1,5483 & 2,0067 & -0,7326 \\ 2,0067 & 4,6876 & -1,4216 \\ -0,7326 & -1,4216 & 1,0644 \end{bmatrix} > 0 \tag{50}$$

$$L = -0,4716 \tag{51}$$

$$M = 0,311. \tag{52}$$



Şekil.3: $G(z)$: ..., $G_m(z)$: $- - -$ and $T(z)$: $-.-$

6 SONUÇLAR

Bu çalışmada, çift serbestlik dereceli statik çıkış geribeslemesi ile ayrık $\mathcal{H}_\infty$ model eşleme probleminin doğrusal matris eşitsizlikleri yaklaşımı ile çözümü öngörülmüştür. Bunun için ayrık $\mathcal{H}_\infty$ model eşleme problemi önce ayrık $\mathcal{H}_\infty$ optimal kontrol problemine indirgenmiş, sonra $\mathcal{H}_\infty$ optimal kontrol probleminin doğrusal matris eşitsizlikleri ile çözmek için geliştirilen yaklaşımdan yararlanılarak, problem çift serbestlik dereceli statik çıkış geribeslemesi ile çözebilmek için gerçekleşmesi gereken genel koşullar elde edilmiş ve nihayet kontrolör tasarımı için geçerli bir algoritma türetilmiştir.

7 KAYNAKLAR

[1] M. AKIN ve A. BİR, Ayrık $\mathcal{H}_\infty$ Model Eşleme Probleminin Tek Serbestlik Dereceli Statik Durum Geribeslemesi ile Çözümü, *Elektrik-Elektronik ve Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu (ELECO2002)*, 2002.

[2] M. AKIN and A. BİR, The $\mathcal{H}_\infty$ Model Matching Problem with One Degree of Freedom Static State Feedback, *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, Vol.11, No.1, pp. 35-44, 2003.

[3] M. AKIN and A. BİR, The Discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ Model Matching Problem with The One Degree of Freedom Static Output Feedback, *Proceedings on the* 1^{st} *International Conference on Mathematics and Informatics for Industry*, pp. 151-161, 2003.

[4] M. AKIN and L. GÖREN, The $\mathcal{H}_\infty$ Discrete Model Matching Problem by Static State Feedback, *WSEAS Transactions on Systems*, Vol.1, pp. 87-93, 2002.

[5] J. C. DOYLE, B. A. FRANCIS and A. R. TANNENBAUM, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, 1992.

[6] J. C. DOYLE, A. PACKARD and K. ZHOU, Review of LFTs, LMIs and μ, *Proceedings on the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1227-1232, 1991.

[7] B. A. FRANCIS, *A Course in* $\mathcal{H}_\infty$ *Control Theory, No.88, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, 1987.

[8] B. A. FRANCIS and J. C. DOYLE, Linear Control Theory with an $\mathcal{H}_\infty$ Optimality Criterion, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol.25, No.4, pp. 815-844, 1987.

[9] P. GAHINET and P. APKARIAN, A Linear Matrix Inequality Approach to $\mathcal{H}_\infty$ Control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol.4, pp. 421-448, 1994.

[10] P. GAHINET, A. NEMIROVSKI, A. J. LAUB and M. CHILALI, *The LMI Control Toolbox For Use with MATLAB*, The MathWorks Inc., 1995.

[11] L. GÖREN and M. AKIN, A Multiobjective $\mathcal{H}_\infty$ Control Problem: Model Matching and Disturbance Rejection, *Proceedings on IFAC* 15^{th} *Triennial World Congress*, 2002.

[12] V. KUCERA, *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems*, Prentice-Hall International, 1991.

[13] W. A. WOLOVICH, *Linear Multivariable Systems*, Springer-Verlag, 1974.