ÇOK ORTAMLI ELEKTRİK ALAN PROBLEMLERİ İÇİN SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

Selçuk YILDIRIM

Fırat Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Elektrik Eğitimi Bölümü, 23119, Elazığ
e-posta: syildirim@firat.edu.tr

ÖZET
Elektrik alan problemleri, genellikle farklı malzeme özelliklerine sahip ortamlardan oluşur. Sınır elemanları yöntemiyle bu problemleri çözmek için, farklı dielektrik katsayılarına sahip olan bölgelerin birleştirilmesi gerekir. Bu amaçla, arasında iki farklı yalıtkan malzeme bulunan düzlemsel bir elektrot sistemi için, iki ayrı denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklemler, ara kesitlerdeki sınır şartları kullanılarak birleştirilmiştir. Sınırlarda, ara kesitlerde ve iç noktalarda hassas sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Sınır elemanları yöntemi, elektrik alanı.*

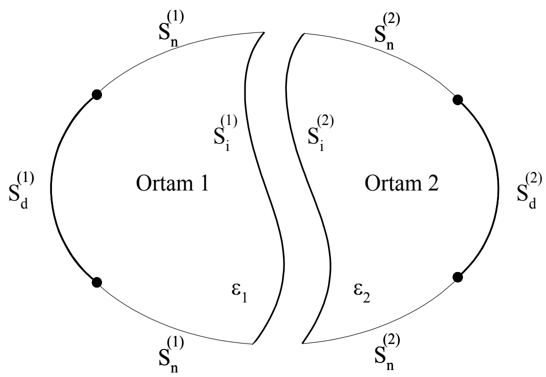
1. GİRİŞ
Yüksek gerilim güç cihazlarının izolasyon tasarımında ve elektrik deşarj problemleri için analiz bölgesinde elektrik alan dağılımının belirlenmesi büyük önem taşımaktadır. Elektrik alanlarının analizinde kullanılan sayısal analiz yöntemleri, integral denklemleriyle hesaplanan sınır yöntemleri ve diferansiyel denklemlerle hesaplanan bölge yöntemleri olmak üzere iki grupta incelenir [1].

Farklı dielektrik özellikleri olan ortamların birleştirilmesi, sonlu elemanlar yöntemine göre daha değişik bir yolla yapılır. Sınır elemanları yönteminde integral işlemleri sınırda yapıldığı için, iki ortamı birleştiren ara kesitte potansiyelin sürekliliği ve normal gradyentin süreksizliği [2] şartları uygulanarak çözüm bölgeleri birleştirilir.

Eğer incelenen problem homojen olmayan bir yapıda ise, problem bölgesi aynı özelliklere sahip homojen alt bölgelere ayrılarak sayısal işlemler uygulanabilir. Bu bölgeleri birleştiren ara kesitlerde sınır şartları olarak potansiyelin sürekliliği ve akıların süreksizliği uygulanarak, her bir alt bölge için denklem takımlarının toplanmasıyla tüm bölge için bir sonuç denklem sistemi elde edilir [3].

Sınır elemanları yöntemi ile iki boyutlu bir elektrik alan probleminin analizinde öncelikle problem bölgesinin sınırındaki bilinmeyenler hesaplanır. Sınır bilinmeyenleri hesaplandıktan sonra, hem iç hem de dış noktalardaki potansiyel ve elektrik alanı hesaplanabilir [4].

2. FORMÜLASYON
Bir elektrik alan problemi için analiz edilecek bölgenin sınırları, Dirichlet sınırı (S_d), Neumann sınırı (S_n) ve iki farklı ortamı birleştiren ara kesit (S_i) olmak üzere üç kısımda incelenir. Ortamların elektriksel geçirgenlikleri ε_1 ve ε_2 'dir (Şekil 1).



Şekil 1. İki farklı ortamdan oluşan problem bölgesi

Sınır şartları olarak, S_d sınırı üzerine potansiyel (u) ve S_n sınırı üzerine potansiyelin normale göre türevi $(\partial u/\partial n=0)$ uygulanır. S_i ara kesit sınırı üzerinde ise potansiyel ve elektrik alan şiddetinin bilinmeyenleri mevcuttur.

Elektrik alanlarının analizinde, analiz bölgesindeki potansiyeller genellikle bilinmeyen değişkenlerdir. Elektrik alan problemlerinin analizinde kullanılan ve problem bölgesini tanımlayan kısmi diferansiyel denklemler, Poisson denklemi veya bu denklemin homojen şekli olan Laplace denklemi tipindedir. Poisson denklemi iki boyutlu sistemlerde,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b \quad (\text{ B bölgesinde }) \qquad (1)$$

şeklinde tanımlanır. Poisson denkleminde b=0 olması durumunda Laplace denklemi elde edilir. Laplace denklemine ağırlıklı artıklar yöntemi uygulanarak sınır integral ifadeleri elde edilebilir. Bunun için denk.(1) bir w ağırlık fonksiyonu ile çarpılır.

$$\iint_B \left(\nabla^2 u\right) w dB = \iint_B \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) w dB = 0 \qquad (2)$$

İkinci dereceden bu kısmi diferansiyel denklemi, birinci dereceden kısmi diferansiyel denkleme dönüştürmek için kısmi integrasyon uygulanır [5]. Kısmi integrasyon sonucunda bölge integrali, sınır integrallerine dönüştürülür.

Böylece, iki boyutlu Laplace denkleminin temel çözümü u* olmak üzere, B bölgesi içindeki herhangi bir 'i' noktasında geçerli olan aşağıdaki denklem elde edilir:

$$u_i + \int_S u\, q^*\, dS = \int_S q\, u^*\, dS \tag{3}$$

Bu denklemin sabit sınır elemanlarıyla ayrıştırılması sonucunda,

$$\sum_{j=1}^{N} H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij} q_j \tag{4}$$

ifadesi elde edilir. N sayıda düğüm için bütün denklemler matris şeklinde ifade edilirse,

$$[H][u] = [G][q] \tag{5}$$

denklem sistemi elde edilir. H ve G etki integralleri, Gauss sayısal integrasyonu kullanılarak aşağıdaki formüllerle hesaplanır:

$$G_{ij} = \frac{\ell_j}{4\pi} \sum_{k=1}^{N} \ell n\left(\frac{1}{r_k}\right) w_k \tag{6}$$

$$H_{ij} = -\frac{\ell_j}{4\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{d_{ij}}{r_k^2} w_k \tag{7}$$

Burada ℓ_j : elemanın boyu, r_k : i düğümü ile j sayısal integrasyon noktaları arasındaki uzaklık, d_{ij}: i düğümünün j elemanına dik uzaklığı ve w_k: Gauss integrasyonu ağırlık katsayılarıdır.

Düğümlerin aynı eleman üzerinde olması durumunda (i=j) ortaya çıkan tekil integraller de analitik olarak hesaplanır:

$$G_{ii} = \frac{\ell_j}{\pi} \left\{ 1 + \ell n\left(\frac{1}{\ell_j}\right) \right\} \tag{8}$$

$$H_{ii} = -\sum_{j=1}^{N} H_{ij} \tag{9}$$

3. ORTAMLARIN BİRLEŞTİRİLMESİ

Şekil 1.'deki gibi iki farklı ortamdan oluşan bir problem bölgesinde, denk.(5) her bölge için ayrı ayrı uygulanır.

1.Bölge (dielektrik sabiti ε_1 olan bölge) için;

$$\begin{bmatrix} H_d^1 & H_n^1 & H_i^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d^1 \\ U_n^1 \\ U_i^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_d^1 & G_n^1 & G_i^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_d^1 \\ Q_n^1 \\ Q_i^1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

denklem sistemi yazılır. Neumann sınır şartı $Q_n^1 = 0$ yazılarak denklem sistemi bilinenler cinsinden yeniden düzenlenirse;

$$\begin{bmatrix} H_n^1 & H_i^1 & -G_d^1 & -G_i^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n^1 \\ U_i^1 \\ Q_d^1 \\ Q_i^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_d^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d^1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

elde edilir. 2. Bölge (dielektrik sabiti ε_2 olan bölge) için de aynı şekilde denklemler yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} H_d^2 & H_n^2 & H_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d^2 \\ U_n^2 \\ U_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_d^2 & G_n^2 & G_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_d^2 \\ Q_n^2 \\ Q_i^2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Neumann sınır şartı $Q_n^2 = 0$ yazılarak denklem sistemi bilinenler cinsinden yeniden düzenlenirse;

$$\begin{bmatrix} H_n^2 & H_i^2 & -G_d^2 & -G_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n^2 \\ U_i^2 \\ Q_d^2 \\ Q_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d^2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

elde edilir. Ayrıca, ara kesit şartları;

$$U_i^1 = U_i^2 = U_i \tag{14}$$

$$\varepsilon_1 . Q_i^1 = -\varepsilon_2 . Q_i^2 \tag{15}$$

şeklinde yazılarak, bu ara kesit şartları denk.(10) ve denk.(13) ile birleştirilebilir. Böylece denk.(16)'daki sonuç denklem sistemi elde edilir [1].

$$\left[\begin{array}{ccc:c:c:c:c} H_n^1 & -G_d^1 & 0 & 0 & -G_i^1 & 0 & H_i^1 \\ \hdashline 0 & 0 & H_n^2 & -G_d^2 & 0 & -G_i^2 & H_i^2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} U_n^1 \\ Q_d^1 \\ U_n^2 \\ Q_n^2 \\ Q_i^1 \\ Q_i^2 \\ U_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} -H_d^1 & 0 \\ \hdashline 0 & -H_d^2 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} U_d^1 \\ U_d^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

4. ÖRNEK PROBLEM

Burada, arasında iki farklı yalıtkan bulunan düzlemsel bir elektrot sistemi incelenmiştir. 1.bölgede ($\varepsilon_1 = 4$), 2. bölgede ($\varepsilon_2 = 1$) alınmıştır.

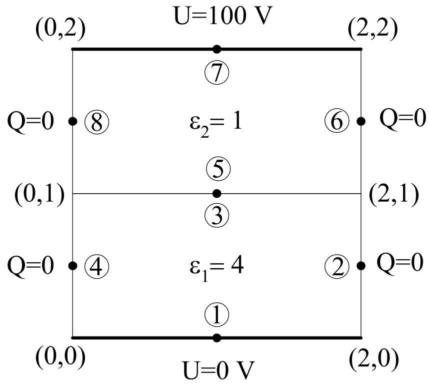
Problem bölgesinin sınırları ve ara kesitleri toplam 8 adet sabit sınır elemanıyla bölmelenmiştir.

Dirichlet sınır şartları; $U_1 = 0$ ve $U_7 = 100$ V
Neumann sınır şartları ise;

$Q_2 = Q_4 = 0$

$Q_6 = Q_8 = 0$

olarak tanımlanmıştır.



Şekil 2. Çok Ortamlı Problem Bölgesi

1. Bölge için denklem sistemi;

$$\begin{bmatrix} 0.4997 & -0.1250 & -0.2497 & -0.1250 \\ -0.2113 & 0.5006 & -0.2113 & -0.0780 \\ -0.2497 & -0.1250 & 0.4997 & -0.1250 \\ -0.2113 & -0.0780 & -0.2113 & 0.5006 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3183 & -0.0210 & -0.0421 & -0.0210 \\ -0.0176 & 0.3183 & -0.0176 & -0.1119 \\ -0.0421 & -0.0210 & 0.3183 & -0.0210 \\ -0.0176 & -0.1119 & -0.0176 & 0.3183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}$$

2. Bölge için denklem sistemi;

$$\begin{bmatrix} 0.4997 & -0.1250 & -0.2497 & -0.1250 \\ -0.2113 & 0.5006 & -0.2113 & -0.0780 \\ -0.2497 & -0.1250 & 0.4997 & -0.1250 \\ -0.2113 & -0.0780 & -0.2113 & 0.5006 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3183 & -0.0210 & -0.0421 & -0.0210 \\ -0.0176 & 0.3183 & -0.0176 & -0.1119 \\ -0.0421 & -0.0210 & 0.3183 & -0.0210 \\ -0.0176 & -0.1119 & -0.0176 & 0.3183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, ara kesit şartları;

$U_3 = U_5 = U_{3,5}$ (Potansiyelin sürekliliği)

$\varepsilon_1.Q_3 = -\varepsilon_2.Q_5$ (Normal gradyentin süreksizliği)

$1.Q_3 = -4.Q_5$

yazılarak, her iki bölge için ayrı ayrı yazılan matrisler birleştirilir.

$$\begin{bmatrix} -0.1250 & -0.1250 & -0.3183 & 0 & 0 & 0 & 0.0421 & 0 & -0.2497 \\ 0.5006 & -0.0780 & 0.0176 & 0 & 0 & 0 & 0.0176 & 0 & -0.2113 \\ -0.1250 & -0.1250 & 0.0421 & 0 & 0 & 0 & -0.3183 & 0 & 0.4997 \\ -0.0780 & 0.5006 & 0.0176 & 0 & 0 & 0 & 0.0176 & 0 & -0.2113 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1250 & -0.1250 & 0.0421 & 0 & -0.3183 & 0.4997 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5006 & -0.0780 & 0.0176 & 0 & 0.0176 & -0.2113 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1250 & -0.1250 & -0.3183 & 0 & 0.0421 & -0.2497 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0780 & 0.5006 & 0.0176 & 0 & 0.0176 & -0.2113 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \\ Q_1 \\ U_6 \\ U_8 \\ Q_7 \\ Q_3 \\ Q_5 \\ U_{3,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4997 & 0 \\ -0.2113 & 0 \\ -0.2497 & 0 \\ -0.2113 & 0 \\ 0 & -0.2497 \\ 0 & -0.2113 \\ 0 & 0.4997 \\ 0 & -0.2113 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak, yukarıdaki denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümüyle, her iki bölgenin sınırları üzerindeki ve ara kesitler üzerindeki bilinmeyen potansiyel ve akı değerleri bulunur.

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \\ Q_1 \\ U_6 \\ U_8 \\ Q_7 \\ Q_3 \\ Q_5 \\ U_{3,5} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 10.0001 \\ 10.0001 \\ -19.9525 \\ 59.9997 \\ 59.9997 \\ 79.8101 \\ 19.9530 \\ -79.8120 \\ 20.0000 \end{bmatrix}}_{\text{Elde Edilen Sonuçlar}} \qquad \begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \\ Q_1 \\ U_6 \\ U_8 \\ Q_7 \\ Q_3 \\ Q_5 \\ U_{3,5} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 10.00 \\ 10.00 \\ -20.00 \\ 60.00 \\ 60.00 \\ 80.00 \\ 20.00 \\ -80.00 \\ 20.00 \end{Bmatrix}}_{\text{Analitik Sonuçlar}}$$

Sınır düğümleri ve ara kesitler için elde edilen bu sonuçlar kullanılarak, iç noktalardaki potansiyel değerleri ile x ve y yönündeki elektrik alan şiddeti ve elektrik alan şiddetinin genliği aşağıdaki denklemlerle hesaplanır [4].

$$[u_i] = [G][q_j] - [H][u_j] \tag{17}$$

$$[E_x] = -[G_x][q_j] + [H_x][u_j] \tag{18}$$

$$[E_y] = -[G_y][q_j] + [H_y][u_j] \tag{19}$$

$$|\vec{E}_m| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \tag{20}$$

Tablo 1. İç Noktalardaki Sonuçların Karşılaştırılması

Koordinatlar		**Potansiyel (V)**		**Elektrik Alan Şiddeti (V/cm)**			
x	**y**	**U**	$\mathbf{U_{analitik}}$	$\mathbf{E_x}$	$\mathbf{E_y}$	$\mathbf{E_m}$	$\mathbf{E_{analitik}}$
1	0.25	5.4410	5.00	0.4908	-20.2682	20.2682	20.00
1	0.50	10.3776	10.00	0.5182	-20.0757	20.0757	20.00
1	0.75	15.9637	15.00	-0.6995	-19.7185	19.7185	20.00
1	1.25	40.6540	40.00	0.1585	-77.5036	77.5036	80.00
1	1.50	59.8105	60.00	0.3257	-76.6792	76.6792	80.00
1	1.75	79.0748	80.00	-0.2839	-81.2611	81.2611	80.00

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, iki farklı yalıtkan ortamdan oluşan bir düzlemsel elektrot sisteminin sınır elemanları yöntemiyle analizi yapılmıştır. Sınır elemanları yönteminde farklı ortamların birleştirilmesi önemli bir konu olduğundan, bundan sonraki çalışmalar için kolaylık olması bakımından matrislerin birleştirilmesi ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Burada izlenen yol, diğer mühendislik uygulamaları için de geçerlidir.

Tüm bölge için elde edilen denklem sisteminden de görüleceği gibi, sınır elemanları yönteminde farklı bölge matrislerinin birleştirilmesi diğer yöntemlere göre farklıdır. Her bölge için ayrı bir denklem sistemi elde edildiği için, sistem matrisinde bir bölgenin düğümlerinin diğer bölgeye etkileri dikkate alınmamaktadır. Dolaysısıyla bu değerler matriste sıfır alınarak ve ara kesit şartları uygulanarak bölge matrisleri birleştirilmektedir.

Sınırlarda ve ara kesit üzerinde elde edilen potansiyel değerleri, analitik çözümler ile karşılaştırıldığında sınırlarda ve ara kesitler üzerinde toplam 8 adet sınır elemanıyla yapılan çözüm sonucunda hassas değerler elde edildiği görülmektedir.

Ara kesit üzerindeki düğümlerde (3 ile 5 nolu düğümler) potansiyeldeki süreklilik nedeniyle her iki taraftaki düğümlerin potansiyelinin eşit olduğu ($U_3 = U_5 = 20$ V) ve akıdaki süreksizlik nedeniyle $\varepsilon_1.Q_i^1 + \varepsilon_2.Q_i^2 = 0$, {4.20 + 1.(-80) = 0} şartının sağlandığı görülmektedir.

Tablo 1.'de iç noktalarda elde edilen potansiyel ve maksimum elektrik alan şiddeti değerleri analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bulunan değerlerin analitik sonuçlar ile uyumlu olduğu görülmektedir. Sınır elemanlarının sayısı arttırılarak veya lineer sınır elemanları kullanılarak sonuçların hassasiyeti arttırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Yamashita, H., Shinozaki, K., Nakamae, E., Boundary-Finite Element Method to Compute Directly Electric Field Intensity with High Accuracy, IEEE Trans. Power Delivery, 3, No.4, 1754-1760, 1988.

[2] Klimpke, B.W., A Two-Dimensional, Multi-Media Boundary Element Method. Master Th., The University of Manitoba, Canada, 1983.

[3] Yıldırım, S., Yüksek Gerilimli Sistemlerde Elektrik Alanlarının Sınır Elemanları Yöntemi Yardımıyla İncelenmesi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 113 s., 1999.

[4] Uyar, M., Sınır Elemanları Yöntemiyle Elektrik Alan Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 77 s., 2004.

[5] O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method. McGraw-Hill, England, 1977.