

BES EKSENLI BIR ROBOT KOLUNDA TERS KINEMATİK HESAPLAMALAR VE YÖRÜNGE PLANLAMASI

Müzeyyen Saritas* ve T. Selcen Tonbul

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi
Gazi Üniversitesi 06570 Maltepe/ANKARA
[*msari@mmf.gazi.edu.tr](mailto:msari@mmf.gazi.edu.tr)

ÖZET

Bu çalışmada, bes eksenli bir Edubot robotta, ters kinematik hesaplamalar ve yörünge planlaması yapılmıştır. Ters kinematik probleminde, robotun uç noktasının gideceği yerin koordinatları (x, y, z) ve robot elinin başlangıç pozisyonuna göre açısı (ϕ) girdi olarak verildi ve eklem açılarının alabileceği değerler (q_1, q_2, q_3, q_4) hesaplandı. Eklem açıları hesaplandıktan sonra, robot verilen görevi gerçekleştiren, hareketinin titreşimsiz ve düzgün olabilmesi için yörünge planlaması yapılmıştır. Yörünge planlaması yapılırken; pozisyonda, hızda ve ivmede süreklilik sağlamak için, besinci dereceden polinomlar kullanılmıştır.

Robotun ters kinematik hesaplamaları ve yörünge planlaması, Matlab 5.02 kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Son olarak, sonuçlar Edubot Robot üzerinde denenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Robot, manipulatör, kinematik, yörünge planlaması

ABSTRACT

THE INVERSE KINEMATICS CALCULATIONS AND TRAJECTORY PLANNING ON A ROBOT ARM WITH FIVE AXES

In this study, the inverse kinematics calculations and the trajectory planning has been done on an Edubot robot arm with five axes. In the inverse kinematics problem, Cartesian coordinates of the goal point (x, y, z) and the angle of the end effector (ϕ) with respect to the initial position were entered as an input and the joint angles (q_1, q_2, q_3, q_4) were calculated. After calculating the joint angles, the trajectory was planned in such a way that the robot achieves a smooth motion while performing the task. Fifth order polynomials

have been used while planning trajectory for obtaining continuity in the position, velocity and acceleration.

The inverse kinematics calculations and the trajectory planning of the robot have been achieved by using Matlab 5.02. Finally, the results have been tested on the Edubot Robot.

1. GİRİŞ

Robot/1-15/, programlanarak tasima ya da yer ve yön degistirme islemlerini gerçeklestirebilen bir sistemdir. Tasima görevi, gövde boyutlarına kıyasla uzak bir mesafeye hareket olarak tanımlanır. Manipulasyon ise, gövdenin pozisyonunda meydana gelen degisikliklerdir. Manipulatör/10/, bir küme eklem birimine bağladığı bir küme rijit kol içerir. Eklemlere motorlar takılmıştır. Böylece mekanizma verilen bir görevi gerçekleştirmek için kontrol edilebilir. Robotun analizi; matematik, mekanik ve elektronik gibi pek çok bilim dalına ait bilgi gerektirmektedir.

Robotlar, endüstride, tipta, haberleşmede ve daha bir çok alanda kullanılmaktadır. Ayrıca, askeri uygulamalarda da robot kullanımı yaygındır.

Robotları, kullanılan kontrol tekniğine ve içerdikleri eklem türlerine göre iki farklı şekilde sınıflandırabiliriz. Kontrol tekniğine göre robotlar: Adaptif olmayan robotlar, adaptif robotlar ve akıllı robotlardır. Adaptif robotlarda bilgisayarlı kontrol ve sensörlü geri besleme vardır. Adaptif olmayan robotlarda sensörlü geri besleme yoktur. Adaptif robotlarda bulunan sensör donanımına ek olarak akıllı robotlarda, geniş bir bellek ve çevrenin ayrıntılı bir modeli bulunmaktadır. Robotlarda; döner, prizmatik, silindirik, küresel, düzlemsel veya helical eklemlerden biri kullanılır ve robot, bu eklem türüne göre de sınıflandırılır. Döner ve prizmatik eklemler robotikte en çok kullanılan eklem türleridir.

Bir robot, mekanik bölümler, hareketlendiriciler ve kontrol birimlerinden oluşmaktadır. Robotun mekanik

bölmeleri; yapısal parçalar, güç ileten parçalar, (rot, disliler vs.), tasiyıcılar ve kuplajlama bölümleri olarak sayılabilir. Modern robotların hareketlendiricileri, çoğunlukla elektrikseldir (DC sürücüler). Ancak, hidrolik ve pnömatikler de yaygın olarak kullanılmaktadır. Modern robotlarda kontrol birimleri, bilgisayar tabanlıdır (CNC-Sayısal Bilgisayar Kontrolü) ve gelişmiş yapıya sahiptirler. Bu gün, bilgisayarlar ve mikroislemciler, yüksek hızda işlemler yaparak, karmaşık kontrol algoritmalarını kısa sürede çözebilmektedir. DSP (Sayısal Sinyal İşleme) uygulayarak paralel işlemci yapısı kullanmak, robot uygulamalarında önemli yer tutmaktadır.

2. ROBOTTA TERS KINEMATİK PROBLEMLER VE YÖRÜNGE PLANLARI

2.1. Alt Problemler

Robotta ters kinematik problem, uygun alt problemlere indirgenerek çözülebilir. Bu yöntem, ilk kez Paden/11/ tarafından sunulmuştur ve Kahan'ın/12/ yayınlanmamış çalışması üzerine bina edilmiştir. Burada belirtilen alt problemlerin özelliği, hem geometrik olarak anlamlı olması, hem de sayısal olarak kararlı olmasıdır.

Alt problem 1: Tek eksen etrafında dönme :

X_1 bir eksen olsun. Verilen bir p noktasının X_1 eksenini etrafında q_1 kadar döndürülerek q noktasına ulaşması, $e^{\hat{x}_1 q_1} p = q$ ile ifade edilir.

Alt problem 2: İki sıralı eksen etrafında dönme:

X_1 ve X_2 kesiksen iki eksen olsun. Verilen bir p noktasının önce X_2 eksenini etrafında q_2 kadar ve daha sonra X_1 eksenini etrafında q_1 kadar döndürülerek q noktasına ulaşması $e^{\hat{x}_1 q_1} e^{\hat{x}_2 q_2} p = q$ denklemi ile sağlanabilir.

Alt problem 3: Verilen bir mesafeye kadar dönme:

X bir eksen olsun. Bir p noktasının X eksenini etrafında, q noktasına d kadar mesafe kalana kadar döndürülmesi, $\|q - e^{\hat{x} q} p\| = d$ denklemi ile ifade edilir.

Yukarıda verilen alt problemler, robotun en azından birkaç kesiksen eksenini varsa kullanıslıdır. Ters kinematik problemlerin çözümünde, geometrik cebirin klasik eleme teorisinden yararlanılabilir. Bu yöntemde Diyalektik eleme de denir /9/. Diyalektik eleme ile önce problem, sadece bir eklem açısını içeren tek

değişkenli bir polinoma indirgenir. Bu polinom çözümlenerek eklem açılarından biri elde edilir. Bulunan açı değeri problemde yerine konular ve diğer eklem açıları bulunana kadar aynı işlem tekrarlanır. Diyalektik eleme ile hesaplanamayan ters kinematik problemler de mevcuttur. Günümüzde, ters kinematik probleminin çözümü için, analitik ve nümerik pek çok yöntem geliştirilmesine rağmen, genel bir yöntem yoktur. Her robot için farklı bir yöntem uygulanabilir.

2.2. Edubot 'un Kinematik Hesaplamaları

Edubot robot, eğitim amaçlı, bes eklemli bir robottur /1/. Eklem-1 orijin kabul edilir ve z eksenini etrafında dönme sağlamaktadır. Eklem-2, eklem-3 ve eklem-4, x eksenini etrafında dönme sağlamaktadır. Eklem-5, robot elini z eksenini etrafında döndürmektedir ve eklem-6, elin bir malzemeyi tutup bırakması için açılıp kapanmasını kontrol etmektedir. Eklem-5 ve eklem-6, uç noktanın pozisyonunu ve yönünü etkilemedikleri için bu çalışmada, kinematik dönüşüm hesaplarına dahil edilmemiştir..

Edubot robotun fiziksel boyutları: $l_1=9.899\text{cm}$, $l_2=9\text{cm}$, $l_3=8\text{cm}$, $l_4=16\text{cm}$ ve $q_{sabit}=45$ derecede seklindedir.

Edubot'un çalışma alanı: Edubot, z eksenini boyunca -26 ile $+40$ cm, y eksenini boyunca -26 ile $+40$ cm ve x eksenini boyunca -40 ile $+40$ cm aralığında çalışabilir. Bu değerlerin dışına ulaşamaz. Ayrıca hedef noktanın çalışma alanı içinde kalabilmesi için, orijine uzaklığı 40 cm' yi geçemez. Hedef nokta çalışma alanı dışında verilirse, ters kinematik hesaplamalarla bulunan eklem açılarının değerleri karmaşık sayı seklinde çıkar.

Robotun ters kinematik problemi aşağıdaki verilmiştir.

$$e^{\hat{x}_1 q_1} e^{\hat{x}_2 q_2} e^{\hat{x}_3 q_3} e^{\hat{x}_4 q_4} g_{st}(0) = g_d \quad (1)$$

Bütün eklem açıları sıfır iken, temel çerçeveyi uç nokta çerçevesine dönüştüren $g_{st}(0)$, her eklem açısı için dönüşüm matrisleri ve uç nokta çerçevesi g_d bulunmuştur /1/. Uç nokta çerçevesi, g_d , robotun uç noktasının koordinatlarını (x , y ve z) ve robot elinin başlangıç pozisyonunu, Φ 'yi ($\Phi = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$) içermektedir.

Edubot'da z ekseninde dönme sağlayan tek eklem birinci eklemidir. Başlangıç noktasındaki x koordinatını sadece bu eklem değiştirebilir. Eklem-1' in açısı q_1 aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mathbf{q}_1 = -a \tan(x, y) \quad (2)$$

Bulunan \mathbf{q}_1 degeri, Esitlik 1'de yerine yerlestirilir ve denklem asagidaki gibi duzenlenir;

$$e^{\hat{x}_2 \mathbf{q}_2} e^{\hat{x}_3 \mathbf{q}_3} e^{\hat{x}_4 \mathbf{q}_4} = g_p \quad (3)$$

Burada: $g_p = e^{-\hat{x}_1 \mathbf{q}_1} g_d (g_{st}(0))^{-1}$. Denklem (3), alt problemlere indirgenerek \mathbf{q}_2 , \mathbf{q}_3 ve \mathbf{q}_4 degerleri bulunur /1/

2.3. Yörünge Planlamasi

Manipilatörün uç noktasinin, baslangiç noktasindan son durumuna kadar hareketi esnasinda, yer degistirme ve dönme yollarini belirleyen noktalar kümesi "Yörünge" olarak isimlendirilir.

Robot hareketinde temel problem, robot ucunu, o anki baslangiç degerinden ($T_{\text{baslangiç}}$), istenilen bir son degere (T_{son}) tasimaktır. Bu harekette, robot kolunun hem yönü hem de pozisyonu degismektedir. Yolun daha detayli tanimlanmasi istendiginde, uç nokta için, baslangiç ve sonuç noktaları arasinda geçiş noktaları ya da ara noktalar tanimlanmalıdır. Bunlara ilave olarak, iki geçiş noktası arasindaki hareketin süresi de yol tanimlanirken verilebilir.

Robotta, ani hareketler mekanizmayı yipratir ve robotta rezonansa yol açarak titresimlere neden olur. Bunu engellemek için, fonksiyonun kendisi, birinci türevi ve ikinci türevinin de sürekli olması istenebilir. Bir fonksiyonda; pozisyonun, hizin ve ivmenin baslangiç ve son degerlerini saglamasi için alti sinirlamanin saglanması gerekir. Asagida verilen besinci dereceden polinom, pozisyonunda, hizda ve ivmede süreklilik saglamaktadır /14, 15/.

$$\mathbf{q}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (4)$$

Denklem 4'teki bütün katsayılar, pozisyonun, hizin ve ivmenin baslangiç ve son degerleri kullanılarak bulunabilir.

2.4. Edubot ' un Yörünge Planlamasi

Robotun uç noktasini bir noktadan baska bir noktaya tasirken, her noktada eklem açılarının bilinmesi gerekmektedir. Edubot robot, alti eklem sahiptir. Bu eklemelerden iki tanesi, robot elini kontrol etmektedir ve uç noktanin gidecegi yeri etkilememektedir. Bu sebeple, robotun sadece dört eklem açisi üzerinde ters kinematik hesaplamalar yapılmıştır. Bu eklem açılarının zamana göre degisimi matris formunda Denklem (5)'te verilmistir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \\ t^5 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Denklem (5)'teki katsayıları bulabilmek için sinir şartları uygulanir ve katsayılar her bir eklem için ayrı ayrı bulunur. Hareket bir baslangiç ve sonuç noktası arasinda gerçekleseyecek ise hizin ve ivmenin, baslangiç ve sonuç degerleri sıfır alınir. Eger geçiş noktaları tanimlanmıssa ve fonksiyonun egimi isaret degistirmiyorsa iki egimin ortalamasi geçiş noktasinin hizi olarak alınir. Fonksiyonun egimi isaret degistiriyorsa hiz sıfır alınir. Bu sekilde, sadece geçiş noktalarının verilmesi ile sistem, her noktadaki hizi kendisi seçer.

3. ROBOT KONTROL PROGRAMI VE UYGULAMASI

Program Matlab 5.02' de yazılmistir /1/. Programın tümü, Selcen isimli bir ana program ve Setpark, Tugba8, Tugba9 ve Tugba10 isimli dört alt programdan meydana gelmiştir. Kullanici önce Selcen isimli ana programi çalıştırir. Ekran robot kolunun resminin bulunduğu bir sayfa gelir. Bu sayfadaki tabloya, uç noktanin gitmesini istedigimiz pozisyon ve yön bilgileri girilir, 'HESAPLA' butonuna basildiginda eklem açileri hesaplanır ve ekranda sonuç pozisyonu grafiksel olarak çizilir. Eklem açılarının hesaplanması **çözüm 1** (Tugba9) veya **çözüm 2** (Tugba10) olmak üzere iki farklı yoldan yapılır. Çözümlerde, ters kinematik problem alt problemlere farklı şekillerde indirgendigi için farklılık vardır. Robot aynı uç nokta konfigürasyonuna farklı eklem açileri ile ulaşmaktadır. Uç nokta koordinatları çalışma alaninin disinda seçilirse eklem açileri karmaşık sayı çıkar.

Eklem açileri hesaplandıktan sonra 'INTERPOLE' butonuna basılırsa yeni bir sayfa açılır. Bu sayfa Tugba8 alt programi tarafından duzenlenir. Kullanici burada ara nokta sayisini ve iki nokta arasindaki hareketin süresini seçer. Eger ara nokta sayısı sıfırdan farklı ise, yani hedef nokta haricinde uç noktanin geçmesi gereken baska noktalar tanimlanacaksa, bu noktaların koordinatları açılan menüden girilir. 'HESAPLA' butonuna basildiginda ekrana dört **eklem açisinin** hareket süresince aldığı degerlerin grafiği gelir. Sonra bosluk tusuna basildiginda ekrana **açışal hızların** zamana göre degisimlerini gösteren grafikler gelir. Tekrar bosluk tusuna basılırsa, bu kez

açısal ivmelerin zamana karşı değişim grafikleri ekrana gelir.

'**YÖRÜNGE**' butonuna basıldığında, uç noktanın izlediği yolun kartezyen koordinatlarda üç boyutlu çizimi ekranda görülür.

'**FILE**' butonuna basıldığında, hesaplanan açı değerleri bir dosya haline getirilip '**Robotica**' kontrol yazılımına aktarılır. '**Robotica**' kontrol yazılımı, Edubot için hazırlanmış bir yazılımdır; eklem açıları ve hızları verilen robotun çalışmasını sağlar. Seçilen programında hesaplanan veriler bu yazılım aracılığıyla Edubot'a gönderildiğinde robot istenilen hareketi yerine getirir. Yapılan uygulamalarda robotun bazı hareketleri gerçekleştiremediği, bazılarını ise belli bir hata ile gerçekleştirdiği gözlenmiştir. Robotun hareketi esnasında meydana gelen hataların bir sebebi, hesaplamalar yapılırken mekanik kısıtlamaların dikkate alınmamasıdır. Edubot'un eklemlerindeki hareketlendiriciler ± 95 derece civarında dönme sağlayabilmektedir. Bu değerlerin dışına çıkıldığında eklemlerdeki motorlar zorlanmaktadır. Oluşan hataların bir diğer kaynağı ise bu tezin çalışma konusu dışında olan kontrol teknikleridir.

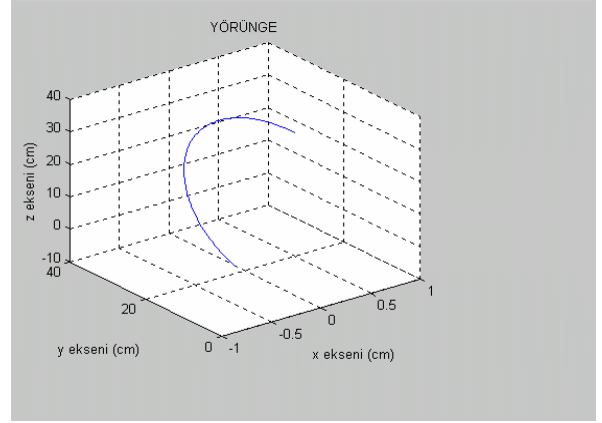
Program kullanılarak, hedef nokta koordinatları: $x=0$ cm, $y=23$ cm, $z=-10$ cm ve robot elinin başlangıç pozisyonuna göre açısı $\phi=\pi$ verilmiş; ara noktaların tanımlandığı (Şekil 1) ve tanımlanmadığı durumlar için eklem açılarının ($q(t)$), açısal hızların ($\dot{q}(t)$), açısal ivmelerin ($\ddot{q}(t)$) zamana göre değişim grafikleri elde edilmiştir. Bu grafikler incelendiğinde, pozisyonda, hızda ve ivmede süreklilik olduğu gözlenmiştir **1/**.

	X	Y	Z	ϕ
1	0	35	13	$-\pi/2$
2	0	23	-2	π

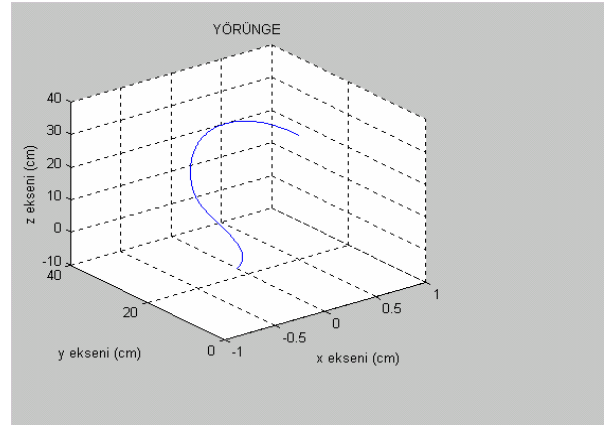
TAMAM

Şekil 1. Ara nokta değerleri

Hız ve ivme eğrileri elde edildikten sonra '**YÖRÜNGE**' ye tıklanmıştır ve robotun uç noktasının izlediği yol, ara noktaların tanımlanmadığı ve tanımlandığı durumlar için kartezyen koordinatlarda üç boyutlu olarak çizdirilmiştir. Şekil 2 ve 3'te görüldüğü gibi, aynı uç nokta konfigürasyonuna ulaşmak için farklı yollar izlenmiştir.



Şekil 2. Uç noktanın ($x=0$, $y=23$, $z=-10$ ve $\phi=\pi$ değerleri için), çözüm 1 kullanılarak, üç boyutlu uzayda kartezyen koordinatlarda izlediği yol



Şekil 3. Uç noktanın ($x=0$, $y=23$, $z=-10$ ve $\phi=\pi$ değerleri için), çözüm 2 kullanılarak, hedef noktaya giderken üç boyutlu uzayda izlediği yol. Burada, Şekil 1'deki ara noktalar seçilmiş ve ara noktalar arasındaki hareket süresi 0.5 sn alınmıştır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

İleri kinematik problem, eklem açıları verilen bir robotun uç noktasını ve yönünü belirlemede kullanılır. Bu çalışmada, verilen uç nokta konfigürasyonu için eklem açılarını belirleyen ters kinematik problemi, exponansiyellerin çarpımı şeklinde ifade edilmiştir. Bu ifadeyi elde etmek için, önce robotun ilk eklemi, temel çerçeve olarak belirlenmiştir. Daha sonra, her defasında robot eklemlerinden sadece birisi hareket ettirilip, diğerleri sabit tutulmuştur ve temel çerçeveyi, dönen eklem çerçevesine dönüştüren, dönüşüm matrisleri bulunmuştur. Elde edilen dönüşüm matrislerinin çarpımı ile uç noktanın verilen konfigürasyonu esitlenerek (Denklemler 2), ters kinematik problemi formüle edilmiştir.

Edubot robot için hazırlanan programda, robotun sadece dört eklem açısı üzerine hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Denklem 3'te ifade edilen ters kinematik problemi, Paden ve Kahan alt problemlerine indirgenerek çözülmüştür.

Yörünge planlaması, robot, bir başlangıç noktasından bir hedef noktaya giderken, hareketinin zamana göre değişiminin planlanması olarak tanımlanmaktadır. Bu çalışmada, ters kinematik problemi çözüldükten sonra, robota titresimsiz ve düzgün bir hareket yaptırabilmek için yörünge planlaması yapılmıştır. Pozisyonda, hızda ve ivmede süreklilik sağlayan besinci dereceden polinomlar kullanılmıştır.

Yapılan çalışmada hesaplamalar, Matlab 5.02' de yazılan bir programla gerçekleştirilmiştir. Matlab, grafiklerin çizdirilmesi ve menülerin hazırlanmasında da kolaylıklar sağlamıştır.

Matlab 5.02'de yazılan programda, robotun ters kinematik problemi için iki farklı çözüm elde edilmiştir. Ara noktaların tanımlandığı ve tanımlanmadığı durumlar için hesaplamalar yaptırılmıştır. Eklem açılarının ($\mathbf{q}(t)$), açısal hızların ($\dot{\mathbf{q}}(t)$) ve açısal ivmelerin ($\ddot{\mathbf{q}}(t)$) zamana göre değişim grafikleri elde edilmiş ve incelenmiştir [1]. Sekillerden, pozisyon, hız ve ivme eğrilerinde süreklilik olduğu gözlenmiştir.

Robotun uç noktasının izlediği yol, ara nokta tanımlandığı ve tanımlanmadığı durumlar için kartezyen koordinatlarda üç boyutlu olarak çizdirilmiştir. Aynı uç nokta konfigürasyonuna farklı yollar izlenerek ulaşıldığı görülmüştür.

Son olarak, Selsen programında elde edilen veriler bir dosya haline getirilip 'Robotica' kontrol yazılımına gönderilmiştir. Hesaplanan veriler bu yazılım ile robot üzerinde denendiğinde, robotun bazı hareketleri tam olarak gerçekleştiremediği gözlenmiştir. Meydana gelen hatanın sebebi, Edubot eklemlerindeki hareketlendiricilerin, sınırlı dönme (± 95 derece) sağlayabilmesidir. Bu değerler dışındaki eklem açılarının gerçekleştirilmesi istendiğinde motorlar zorlanmaktadır. Ayrıca hareketlendiriciler üzerindeki yük miktarı da robot hareketini kısıtlayıcı bir etkidir. Bu çalışmanın devamında, robotun çalışma alanını genişletmek için eklemlerdeki hareketlendiricilerin sağladıkları açılar artırılabilir. Ayrıca robotun, hareketi en az hata ile gerçekleştirmesi için robotun dinamik yapısı üzerine yapılan hesaplamalar, yörünge planlaması yapılırken dikkate alınabilir. Robotun hareketi esnasında meydana gelen titresimler, PID (oransal+integral+türevsel) kontrolcüler kullanılarak azaltılabilir.

Robot için yörünge planlaması yapılırken, robotun çalışma alanı içerisinde engeller konulabilir. Robot, bu

engelleri hissedebilecek sensörlerle donatılabilir ve yörünge planı, robotun karşılaştığı engellere çarpmadan hareket etmesini sağlayacak şekilde geliştirilebilir.

KAYNAKÇA

1. Tugba Selsen Tonbul, 'Bes eksenli bir robot kolunun ters kinematik hesaplamalarının ve yörünge planlamasının yapılması', Yüksek Lisans Tezi (Danışman: Prof. Dr. M. Saritas), Gazi Üniv., F.B.E., 2002.
2. Kirecci A. And Gilmartin M.J., 'Improved trajectory planning using arbitrary power polynomials', Proceedings of I.Mech.E., vol. 208, s 3-13, 1994.
3. Ernst H.A., 'A Computer-Operated Mechanical Hand', Ph.D.thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1961.
4. Sutherland J.M., 'Robot Applications', IIT Research Institute, Chicago, 1970,
5. Scheinman V.C., 'Design of a Computer-Controlled Manipulator, Artificial Intelligence Laboratory', Stanford University, Stanford, 1969.
6. Paul R.P., 'Modelling, Trajectory Calculation and Servoing of a Computer-Controlled Arm, Artificial Intelligence Laboratory', Stanford University, 1972,
7. Whitney D.E., 'The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators', Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, s 303-309, 1972.
8. Lozano-Perez T., 'Robot Programming', Proceedings of the IEEE, vol. 71, no.7, s 821-841, 1983.
9. Somle J., Lantos and Cat P.T., 'Advanced Robot Control', Akademiai Kiada, s 4-176, Budapest, 1997.
10. Murray, Richard M., 'A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation', CRC, s 78-124, Boca Raton, 1994.
11. Paden B., 'Kinematics and Control Robot Manipulators', Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, 1986.
12. Kahan W., 'Lectures on Computational aspects of Geometry', Unpublished manuscripts, 1983.
13. Selig, J.M., 'Geometrical Methods in Robotics', Springer, s 52-61, New York, 1996.
14. Bayseç S. And Alici G., 'Two dimensional step guidance of a dynamic load avoiding residual vibrations by a point positioning robot manipulator', Computer Simulation Conference, s 425-428, Boston, 1993.
15. Gupta A. and Kamal D., 'Practical Motion Planning in Robotics: Current Approches and Future', Wiley, s 172-205, Chishester, 1998.