

BMI yaklaşımıyla BARON Optimizasyonu kullanarak Oransal-Türevsel Gözlemleyici Tasarımı

Proportional-Derivative Observer Design via BMI Approach using BARON Optimization

Mehmet Canevi¹, Bayram Melih Yılmaz², Kamil Fatih Dilaver³

¹ Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

Niğde Üniversitesi

mehmet.canevi@nigde.edu.tr

² Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

Niğde Üniversitesi

myilmaz@nigde.edu.tr

³ Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü

Niğde Üniversitesi

kfdilaver@nigde.edu.tr

Özet

Bu çalışma Oransal ve Türevsel gözlemleyici tasarımları için LMI formülizasyonları ile başlamaktadır ve Oransal-Türevsel gözlemleyicinin hata dinamiğinin türetilmesi ile devam etmektedir. Oransal gözlemleyici ve Türevsel gözlemleyici Oransal-Türevsel gözlemleyici elde etmek için birleştirilmiştir. Birleştirilen gözlemleyiciler LMI yöntemiyle tasarlanabilmektedir yeni oluşan OT gözlemleyici ise sadece BMI formülizasyonları ile tasarlanabilmektedir. Önerilen OT gözlemleyici için BMI formülizasyonunu elde etme amacıyla hata dinamiğinde bir değişken için değişken değiştirme kullanılmıştır. Kazanç minimizasyonu, oturma süresi maksimizasyonu ve L_2 kazanç minimizasyonu ile gözlemleyici performansı optimize edilmiştir. Verilen örneğe OT gözlemleyici tasarlamak için BMI problemi çözmede BARON kullanılmıştır. BARON Branch and Bound optimizasyon algoritmasını kullanarak konveks olmayan problemleri global optimum için çözen bir yazılımdır. Optimizasyon kriterlerini doğrulamak için 3 farklı tasarımın karşılaştırılması verilmiştir.

Abstract

This work begins with LMI formulations of Proportional and Derivative observer designs and continues with derivation of the error dynamics of the Proportional-Derivative observer. Proportional observer and Derivative observer are combined to acquire the Proportional-Derivative observer. The observers which are combined can be designed via LMI methods but the new observer can only be designed via BMI formulations. A substitution is used for a term in the error dynamics in order to obtain the BMI formulation of the proposed observer. The performance is optimized via gain minimization, decay rate maximization and L_2 gain minimization. BARON is used to solve the BMI problem to design a PD observer for the given example. BARON is a software that solves nonconvex optimization problems for global optimality via Branch and Bound optimization algorithm. A comparison of three different designs are given to verify that the optimization criteria are valid.

1. Giriş

Linear Matrix Inequalities(LMI)'nin dinamik sistemlerdeki ilk kullanımı Lyapunov Teorisi'nin ortaya çıkmasına dayanmaktadır. Bir otonom dinamik sistemin kararlılığını inceleyen Aleksander M. Lyapunov Lyapunov Eşitsizliği ile ilk LMI'yi ortaya koymuştur [1]. Ardından Lur'e ve Postnikov gibi önemli isimler LMI'yi pratik problemlerde kullanmaya başlamışlardır [2, 3, 4, 5]. LMI optimizasyon problemlerinde konveks bir sınırlamadır ve bu optimizasyon problem türünü çözebilecek birçok yazılım mevcuttur [6, 7, 8, 9]. Klasik Luenberger gözlemleyicisi tasarımı LMI problemi olarak ifade etmek mümkündür [1, 10], fakat Oransal Türevsel gözlemleyici tasarımı Bilinear Matrix Inequality(BMI) problemi olarak ifade edilmektedir [11, 12, 13, 14]. BMI LMI'nin daha genel gösterimidir. BMI problemleri çözmek LMI'ye göre oldukça zordur. Bu zorluk LMI optimizasyon problemlerinin çözümlerinin polinomal zamanda elde edilebilmesinden ve BMI optimizasyon problemlerin ise polinomal zamanda çözülememesinden ileri gelmektedir. Bu optimizasyon problemlerine P-NP problemler denir [15, 16]. BMI optimizasyon problemi NP bir problem olduğundan mevcut çözümler yazılımlar performans gerektirmektedir [17, 18, 19] BMI/LMI ile gözlemleyici tasarımında amaçlanan gözlemleyici için performans kriterlerini zaman domeninde ifade etmek ve optimizasyon yazılımları ile çözüme imkanı sunmaktır. Bu performans kriterleri gözlemleyicinin düşük kazanç katsayılarına sahip olması, daha çabuk oturması ve gürültüye karşı bağımsızlığı olması seçilebilir ve bunlar matris eşitsizlikleri ile ifade edilir [1].

2. Oransal-Türevsel Gözlemleyici

1971'de David Luenberger'in önerdiği Oransal Gözlemleyici(yada Luenberger Gözlemleyicisi) [10]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{1}$$

sistemi için

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x}\end{aligned}\quad (2)$$

ifadesi ile verilir. Bu gözlemleyicinin yanı sıra Türevsel Gözlemleyici

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K(\dot{y} - \dot{\hat{y}}) \\ \hat{y} &= C\hat{x}\end{aligned}\quad (3)$$

şeklinde ve (2) ile (3)'dan oluşan Oransal-Türevsel Gözlemleyici [20, 21]

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) + K(\dot{y} - \dot{\hat{y}}) \\ \hat{y} &= C\hat{x}\end{aligned}\quad (4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sistem matrisi, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ giriş matrisi, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ çıkış matrisi, $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$ Luenberger vektörü ve $K \in \mathbb{R}^{n \times q}$ türev vektörüdür. Gözlemleyiciler tasarlanırken hata dinamiklerinden faydalanılır. Oransal Gözlemleyici ve Türevsel Gözlemleyici için hata dinamikleri sırasıyla (5) ve (6)'de verilmiştir.

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \quad (5)$$

$$\dot{e}(t) = (I + KC)^{-1}Ae(t) \quad (6)$$

Oransal-Türevsel Gözlemleyicinin hata dinamiği ise

$$\dot{e}(t) = (I + KC)^{-1}(A - LC)e(t) \quad (7)$$

ifadesi ile tanımlanır. (5) ve (6) ile verilen hata dinamikleri kullanılarak kutup ataması yapıldığında her kutuba karşılık tek bir K veya L katsayısı seçilebilmektedir. (7) ifadesi kullanılarak yapılan kutup atamasında seçilecek olan K ve L katsayıları için sonsuz farklı çözüm mevcuttur ve katsayı seçimi yapılırken optimizasyon kullanma imkanı sunmaktadır.

3. OT gözlemleyici için BMI

Kutup atama yöntemine göre daha esnek bir yöntem olan Lyapunov kararlılık analizi zaman domeni tasarımı önemli rol oynamaktadır. Aday Lyapunov fonksiyonu

$$V = e^T P e, P = P^T > 0 \quad (8)$$

olarak seçilir ve

$$\dot{V} = e^T P e + e^T P \dot{e} < 0, P > 0 \quad (9)$$

olması sağlanır. Oransal gözlemleyici için Lyapunov fonksiyonunun türevi

$$\dot{V} = e^T (A - LC)^T P + e^T P (A - LC) < 0, P > 0 \quad (10)$$

olarak elde edilir. Bu ifade LMI değildir, bu ifadeyi LMI haline getirmek için

$$\begin{aligned}(A - LC)^T P + P(A - LC) &< 0, P > 0 \\ A^T P - C^T L^T P + PA - PLC &< 0, P > 0\end{aligned}\quad (11)$$

(11)'deki düzenlemeler yapılsa

$$A^T P + PA - SC - C^T S^T < 0, P > 0, S \triangleq PL \quad (12)$$

LMI ifadesi elde edilir. Problem tek bir LMI olarak ifade edilirse

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - SC - C^T S^T & 0_{(n,n)} \\ 0_{(n,n)} & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

elde edilir. Türevsel Gözlemleyici için Lyapunov fonksiyonunun türevi

$$\dot{V} = e^T [(I + KC)^{-1}A]^T P e + e^T P [(I + KC)^{-1}A] e < 0, P > 0 \quad (14)$$

şeklinde ve (2) ile (3)'dan oluşan Oransal-Türevsel Gözlemleyici için

$$(I + KC)^{-1} = (I + QC) \quad (15)$$

olarak seçilsin. Bu ifade için

$$\begin{aligned}(I + KC)(I + QC) &= I \\ I + QC + KC + KCQC &= I \\ QC + KCQC &= -KC \\ Q + KCQ &= -K \\ (I + KC)Q &= -K \\ Q &= -(I + KC)^{-1}K\end{aligned}\quad (16)$$

tanımlanmıştır. (14) ve (15) kullanılarak

$$\dot{V} = e^T [(I + QC)A]^T P e + e^T P [(I + QC)A] e < 0, P > 0 \quad (17)$$

ifadesi elde edilir. Buradan ise

$$\begin{aligned}[(I + QC)A]^T P + P[(I + QC)A] &< 0 \\ [A + QCA]^T P + P[A + QCA] &< 0 \\ A^T P + A^T C^T Q^T P + PA + PQCA &< 0\end{aligned}\quad (18)$$

ifadesi elde edilir. Değişken dönüşümü ile

$$A^T P + PA + RCA + A^T C^T R^T < 0, R \triangleq PQ \quad (19)$$

LMI ifadesi elde edilir. Problem tek bir LMI olarak ifade edilirse

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + RCA + A^T C^T R^T & 0_{(n,n)} \\ 0_{(n,n)} & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

elde edilir. Oransal-Türevsel Gözlemleyici için Lyapunov fonksiyonunun türevi

$$\dot{V} = e^T [(I + KC)^{-1}(A - LC)]^T P e + e^T P [(I + KC)^{-1}(A - LC)] e < 0, P > 0 \quad (21)$$

şeklinde ve (15) kullanılarak

$$\dot{V} = e^T [(I + QC)(A - LC)]^T P e + e^T P [(I + QC)(A - LC)] e < 0, P > 0 \quad (22)$$

ifadesi elde edilir. Buradan ise

$$\begin{aligned}[(I + QC)(A - LC)]^T P + P[(I + QC)(A - LC)] &< 0 \\ [A - LC + QCA - QCCLC]^T P + P[A - LC + QCA - QCCLC] &< 0 \\ A^T P - C^T L^T P + A^T C^T Q^T P - C^T L^T C^T Q^T P + & \\ PA - PLC + PQCA - PQCLC &< 0\end{aligned}\quad (23)$$

elde edilir ve bu ifade LMI değildir. Bu ifadede Q veya L değişkeni sabitlenirse ifade LMI olmaktadır, dolayısıyla bu ifade BMI olarak adlandırılmaktadır. Değişken dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} A^T P + PA - SC - C^T S^T + RCA + A^T C^T R^T - RCP^{-1}SC \\ - C^T S^T P^{-1}C^T R^T < 0, P > 0 \\ S \triangleq PL, R \triangleq PQ \end{aligned} \quad (24)$$

elde edilir.

4. Performans kriterleri

Bu kısımda gözlemleyici performansını iyileştirmek için sırasıyla maksimum kazancın küçültülmesi, oturma süresinin hızlandırılması ve L_2 kazanç katsayısının küçültülmesi konularından bahsedilecektir.

4.1. Kazanç katsayılarının minimizasyonu

Sistemin durumlarında ve çıkışında oluşabilecek gürültülerden dolayı gözlemleyici tasarımında seçilen katsayıların büyümesi istenmez. Bu durum bir optimizasyon problemi olarak

$$\begin{aligned} \text{maks } t \\ P > tI \\ A^T P + PA - SC - C^T S^T + RCA + A^T C^T R^T \\ - RCP^{-1}SC - C^T S^T P^{-1}C^T R^T < 0 \\ R \triangleq PQ, S \triangleq PL, (I + KC)^{-1} = (I + QC) \end{aligned} \quad (25)$$

şeklinde ifade edilir.

4.2. Oturma süresinin hızlandırılması

Gözlemleyicinin performans kriterlerinden bir tanesi de oturma süresidir. Oturma süresinin hızlanması için Lyapunov aday fonksiyonunun

$$\dot{V} \leq -2\alpha P \quad (26)$$

şartını sağlamalıdır. Oturma süresi optimizasyon problemi olarak ifade edilirse

$$\begin{aligned} \text{maks } \alpha \\ P > 0 \\ A^T P + PA - SC - C^T S^T + RCA + A^T C^T R^T \\ - RCP^{-1}SC - C^T S^T P^{-1}C^T R^T + 2\alpha P \\ R \triangleq PQ, S \triangleq PL, (I + KC)^{-1} = (I + QC) \end{aligned} \quad (27)$$

şeklinde.

4.3. L_2 kazanç minimizasyonu

En önemli performans indekslerinden biri gözlemleyicinin gürültü bağışıklılığıdır. Bunun incelenmesi için (1) ifadesi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + B_d d \\ y &= Cx + D_d d \end{aligned} \quad (28)$$

olarak güncellenmelidir. (28) ifadesine göre hata dinamiği

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (I + KC)^{-1}(A - LC)e(t) + (I + KC)^{-1}(B_d \\ &- LD_d)d - (I + KC)^{-1}KD_d \dot{d} \end{aligned} \quad (29)$$

olarak elde edilir. İşlem kolaylığı açısından çıkış sinyalindeki gürültü D_d ihmal edilecektir. Hata sinyali ile gürültü sinyali arasında tanımlanan L_2 katsayısı maksimize edilmelidir ve gürültü bağışıklılığı için Lyapunov aday fonksiyonu

$$\dot{V} + e^T e - \gamma^2 d^T d < 0 \quad (30)$$

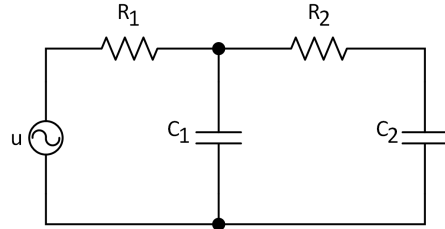
şartını sağlamalıdır. Bu şart optimizasyon problemi olarak ifade edilirse

$$\begin{aligned} \min \gamma^2 \\ P > 0 \\ \begin{bmatrix} M & PB_d + RCB_d \\ B_d^T C^T R^T + B_d^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \\ M \triangleq A^T P + PA - SC - C^T S^T + RCA + A^T C^T R^T \\ - RCP^{-1}SC - C^T S^T P^{-1}C^T R^T + I < 0 \\ R \triangleq PQ, S \triangleq PL \\ (I + KC)^{-1} = (I + KC), D_d = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

elde edilir.

5. Sayısal Örnek

Bu bölümde önerilen Oransal-Türevsel gözlemleyici şekil 1 ile verilen RC devresi üzerinde denenecektir. Verilen devrenin durum değişkenleri $x_1 = V_{C1}, x_2 = V_{C2}$ ve sistem dinamikleri



Şekil 1: RC Sistem

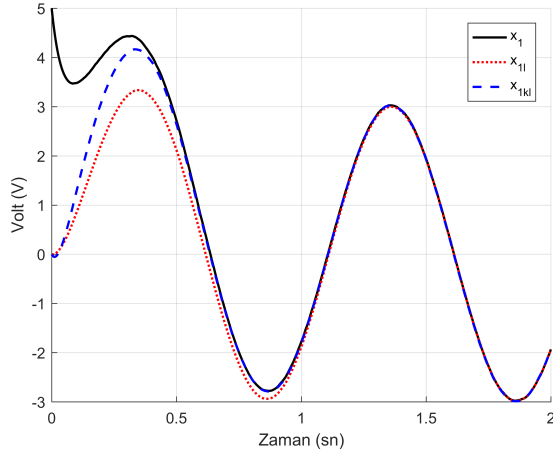
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_1 R_1} + \frac{-1}{C_1 R_2} & \frac{1}{C_1 R_2} \\ \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} & \frac{-1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (32)$$

şeklinde. Benzetimin kolaylığı açısından $R_1 = R_2 = 1, C_1 = C_2 = 0.1$ ve çıkış R_1 üzerindeki akım olarak seçilmiştir. Bu durumda örnek sistemin dinamik modeli

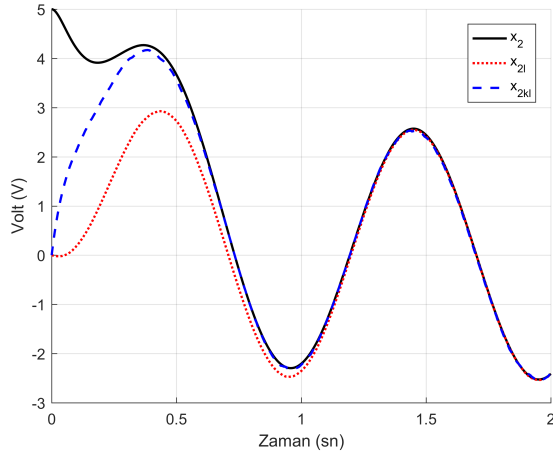
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -20 & 10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (33)$$

şeklinde. Giriş sinyali $u = 5\sin(2\pi t)$ ve başlangıç koşulları $x(0) = \begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix}^T$ olarak seçilmiştir. Sistemin durumlarında oluşan gürültü matrisi $B_d = 0.75I_{(2,1)}$ ve çıkışında oluşan gürültü matrisi $D_d = 1.25$ olarak seçilmiştir ve sisteme gürültü olarak beyaz gürültü uygulanmıştır. Optimizasyon kriterlerini

doğrulamak amacıyla 3 farklı tasarım aynı sistem üzerinde denenmiştir. Bu tasarımlar Tablo 1’de verilmiştir. Burada Tasarım 1’de diğer tasarımlara göre α ve t parametreleri küçük ve γ parametresi büyük seçilmiştir. Tasarım 2’de ise α ve t parametreleri artırılmıştır. Tasarım 3’de ise performans kriterlerine göre α ve t büyük, γ ise küçük seçilmiştir. Problem NP zor olduğu için Tablo 1’de verilen Tasarım 3’den daha iyi bir tasarım deneysel olarak bulunamamıştır. Tablo 1’de önerilen Tasarım 3’ün x_1, x_2 durumu kestirimleri sırasıyla şekil 2 ve şekil 3 ile verilmiştir. Bu şekillerde baz alınan Oransal gözlemleyici ile OT gözlemleyici karşılaştırılmıştır.



Şekil 2: Tasarım 3’ün x_1 durumu kestirimi



Şekil 3: Tasarım 3’ün x_2 durumu kestirimi

Şekil 4 ve şekil 5’de Tablo 1 de verilen 3 tasarımın hata sinyalleri verilmiştir. Tablo 1 de hatanın varyansına göre bakıldığında şekil 4 de önerilen gözlemleyici diğer tasarımlara göre daha düşük varyansla kestirim yapmaktadır. Tablo 1 de hatanın varyansına göre bakıldığında şekil 5 de önerilen gözlemleyici ve Tasarım 2, Tasarım 1’e göre daha düşük varyansla kestirim yapmaktadır. Şekil 4 ve şekil 5’e bakıldığında Tasarım 3 diğer tasarımlara göre daha iyi çalışmaktadır. Tablo 2’de tasarımların BARON yazılımının çıktıları verilmiştir. Bu-

rada optimizasyon kriterlerinin sınırları zorlandığında problemin çözümünün zorlaştığı görülmektedir

6. Sonuç

Bu çalışmada OT gözlemleyici tasarımı bir BMI problemi olarak ifade edilmiştir. OT gözlemleyiciyi performans kriterlerine göre optimize edecek BMI problemi oluşturulmuştur. BMI problemi BARON yazılımı kullanılarak çözülmüştür. Bir örnek üzerinde 3 farklı OT gözlemleyici tasarımı ile performans kriterleri doğrulanmıştır. Sistemin çıkışındaki gürültü tasarım aşamasında ihmal edilmiştir, fakat benzetim aşamasında deneysel olarak eklenmiştir. Benzetimler Matlab ortamında BARON yazılımı kullanılarak Intel i7 6700HQ@2.60 GHz, 16.0GB Ram özelliklerine sahip bir bilgisayar üzerinde çalıştırılmıştır. İlerleyen çalışmalarda OT gözlemleyicinin tasarımında çıkış gürültüsünün BMI ifadesine eklenmesi hedeflenmektedir.

Tablo 1: Oransal-Türevsel gözlemleyiciyi tasarımlarının parametrelerinin ve varyanslarının karşılaştırması. Burada V (.) varyansı göstermektedir.

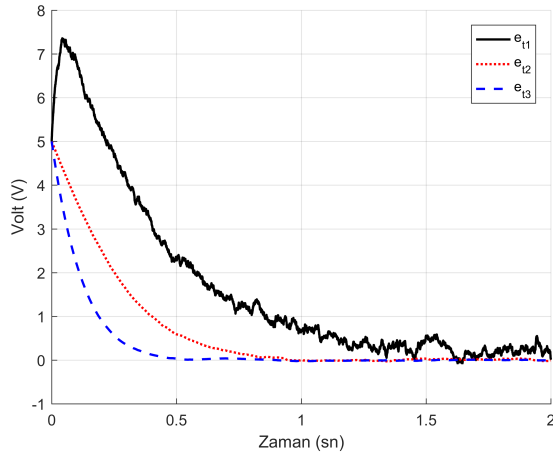
	Tasarım 1	Tasarım 2	Tasarım 3
P	17.67 18.02 18.02 22.03	5.32 -1.61 -1.61 6.72	81.64 -75.83 -75.83 78.07
S	122.70 88.96	1.00 1.00	1.00 1.00
R	-3.92 5.42	4.76 -5.22	83.75 -84.75
α	2.00	5.00	9.00
t	1.00	4.00	4.00
γ	0.55	0.55	0.32
Q	-2.85 2.57	0.71 -0.61	0.18 -0.31
L	17.01 -9.88	0.25 0.21	0.25 0.25
K	0.74 -0.67	-2.46 2.09	-0.22 1.11
$V(e_{1l})$	2.0948	0.5434	0.6851
$V(e_{1kl})$	1.8538	0.8797	0.5502
$V(e_{2l})$	0.1991	1.0154	1.2969
$V(e_{2kl})$	0.1799	0.5663	0.5174

Tablo 2: BARON yazılımının çıktıları

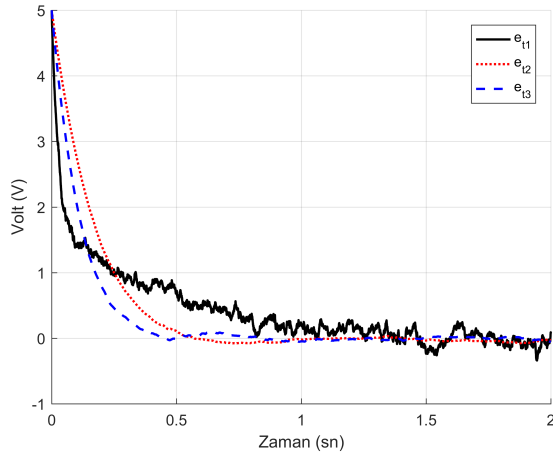
	Tasarım 1	Tasarım 2	Tasarım 3
Topl. CPU süresi	0.06sn	15.11sn	40.23sn
İterasyon sayısı	-1	993	1251
Maks düğüm sayısı	0	310	648

7. Kaynaklar

- [1] Boyd, S., Ghaoui El, L., Feron, E. and Balakrishnan, V., "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [2] Lur’e, A. I. , "Some nonlinear Problems in the Theory of Automatic Control", H. M. Stationery Off., London, 1957.
- [3] Yakubovich, V. A., "The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory.", Soviet Math. Dokl., 3:620-623 1962.



Şekil 4: 1. durumun kestirim hataları



Şekil 5: 2. durumun kestirim hataları

- [4] Yakubovich, V. A., "Solution of certain matrix inequalities encountered in nonlinear control theory", *Soviet Math. Dokl.*, 5:652-656 1964.
- [5] Yakubovich, V. A., "The method of matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems, I, II, III.", *Automation and Remote Control*, 25-26(4):905-917, 577-592, 753-763, 1967.
- [6] Gahinet, P. and Nemirovskii, "LMI Lab: a package for manipulating and solving LMIs", 1993. Computer Software.
- [7] Gahinet, P., Nemirovskii, Laub, A. J. and Chilali, M., "LMI Control Toolbox", 1995. Computer Software.
- [8] Boyd, S., Wu, S., "A Parser/Solver for Semidefinite Programs With Matrix Structure: User's Guide", Stanford University, Stanford, California, 1996.
- [9] Boyd, S., Wu, S., "sdpsol: A Parser/Solver for Semidefinite Programs With Matrix Structure", Stanford University, Stanford, California, 1996.
- [10] Luenberger, D., "An introduction to observers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):596-602, 1971.
- [11] Goh, K. C., Ly, J. H., Turan L. and Safonov, M. G., " μ/k_m synthesis via bilinear matrix inequalities", *Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control* Lake Buena Vista, Florida, 596-602, 1994.
- [12] Goh, K. C., Safonov, M. G. and Papvassilopoulos, G. P., "A global optimization approach for the BMI problem", *Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control* Piscataway, NJ, 2009-2014, 1994.
- [13] Goh, K. C., Turan, L., Safonov, M. G. and Papvassilopoulos, G. P., "Biaffine matrix inequality properties and computational methods", *Proc. of the American Control Conf.* IEEE press, Piscataway, NJ, 850-855, 1994.
- [14] VanAntwerp, J. G. and Braatz, R. D., "A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities", *Journal of Process Control* 10(4):363-385, USA, 2000.
- [15] Garey, M. R. and Johnson, D. S., "Computers and Intractability: A Guide to NP-Completeness", *W. H. Freeman and Company.*, New York, 1983.
- [16] Papadimitriou, C. H. and Steiglitz, K., "Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity", *Prentice Hall.*, New Jersey, 1982.
- [17] D. Henrion and J. Lofberg and M. Kocvara and M. Stingl, "Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI", *Proc. of the 44th IEEE Conf. on Decision and Control*, 7581-7586, 2005.
- [18] Sahinidis, Nikolaos V., "BARON: A general purpose global optimization software package", *Journal of Global Optimization*, 8(2):201-205, 1996.
- [19] Tawarmalani, M. and N. V. Sahinidis, "A polyhedral branch-and-cut approach to global optimization", *Mathematical Programming*, 103(2), 225-249, 2005.
- [20] Ren, Junchao and Zhang, Qingling, "PD observer design for descriptor systems: An LMI approach", *International Journal of Control, Automation and Systems*, 8(4), 735-740, 2010.
- [21] Ying Gu and Ming Huangfu and Dan Ye, "Fault reconstruction for linear descriptor systems using PD observer in finite frequency domain", *2012 24th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 2281-2286, 2012.