MATEMATİĞİMİZ VE UYGARLIĞIMIZ[1]

Prof. Dr. Mithat İdemen

Bugün uygar dünyada yaşayan insanlar konforlu yaşamlarını çok sayıda araç ve gerecin sağladığı olanaklarla sürdürebilmektedir. Bunların bir kısmı üzerlerinde (örneğin gözlükleri, kalemleri, saatleri, cep telefonları vs.), bir kısmı evlerinde veya iş yerlerinde (örneğin mutfak aletleri, müzik setleri, televizyon cihazları, bilgisayarları vs.), bir kısmı da yaşadıkları şehirlerin bir köşesinde (örneğin hastanelerde, istasyonlarda, hava meydanlarında, vapur iskelelerinde, bankalarda vs.) yer almaktadır. Bunlardan birinin çalışmaz duruma düşmesi insanları çok mutsuz etmektedir. İlginç olan şudur ki; onların babalarının çocukluk günlerinde bu alet ve gereçlerin çoğu (örneğin renkli televizyonlar, cep telefonları, tomografi cihazları, diyaliz aletleri, İnternet vs.) yoktu. Buna rağmen büyük babaları hiç de mutsuz değildi. Çünkü insan bilmediği şeyin yokluğunu hissetmiyor ve ondan dolayı mutsuzluk duymuyor. İnsanın mutsuzluğu sahip olduğunu kaybedince ortaya çıkıyor.

Daha da gerilere, 400 yıl kadar önceye gidecek olursak, ulaşımın deve kervanları, at arabaları ve denizdeki basit teknelerle yapıldığı; haberleşmenin ise sadece mektuplar aracılığıyla sağlandığı bir dünya ile karşılaşırız. İnsan o günlerinde ve öncesindeki yüzbinlerce yıl boyunca konfor olarak sadece onları bildi ve şikâyet etmeden o koşullarda yaşadı. O uzun sürece bakarak, şu soruyu gündeme getirmemek mümkün değildir:

Nasıl oldu da yüzbinlerce yıl sürüp gitmiş olan ilkel yaşamımız son 400 yılda, gitgide artan bir hızla uygarlaşıp bugünkü haline geldi?

İşte şimdi sizlerle bu konuda sohbet etmek; bu gelişmenin temelini oluşturduğunu düşündüğüm bilimsel devrim niteliğindeki bazı gelişmelere ilişkin görüşlerimi ve o gelişmelerin bana verdiği hazzı sizlerle paylaşmak istiyorum. Bu vesile ile bugünkü uygar yaşantımız nedeniyle kimlere, nasıl minnet borcumuz olduğunu da hatırlamış olacağız.

Yukarıdaki soruya benim cevabım; "Matematiğimiz bu tempoda geliştiği için uygarlığımızın gelişim süreci böyle oldu" şeklinde olacaktır. Çünkü başlangıçta sözünü ettiğim o alet ve gereçlerin tasarım ve yapım aşamaları yakından incelenecek olursa görülür ki hepsi; önce fizik, kimya ve biyoloji adı altında toplamış olduğumuz bilgi yığını çok yüksek düzeyde matematik tekniklerle kâğıt üzerinde harmanlanmış; daha sonra laboratuvarlarda test edilmiş; en sonunda da fabrikalarda seri imalata geçilmiştir. Önemle vurgulamak gerekir ki; bu işlemler esnasında optimum yönün belirlenmesinde en güvenilir yön gösterici, sadece matematik olmuştur.

Benim böyle konuştuğumu duyan birileri, "Matematik nedir? Bu işlevi başarır hale nasıl gelmiştir?" diye sorabilir. İşte sohbetimizin esas konusu budur.

İnsanın uygarlaşmasını sağlayan, beyin adını verdiğimiz organındaki yetenektir. Ben beyin ve onun işleyişi konusunda uzman değilim, ama söz konusu yeteneğin ikiye ayrılabileceği kanısındayım:

1- Görülenleri ve duyulanları depolama yeteneği,
2- Depodakileri harmanlayarak yeni ürünler üretme yeteneği.

Bunlardan ilkini hafıza, ikincisini de akıl olarak adlandırıyoruz. Her iki yetenek de belirli düzeylerde, beyni olan diğer hayvanlarda da var. Hafıza, yani depolama yeteneği, yaratıldığımız gün var olan haliyle, hatta zamanla zayıflayarak, yaşam boyu etkinliğini sürdürüp gidiyor. Buna karşın akıl, yani üretme yeteneği, ancak sistemli ve yorucu bir eğitimin sonunda ortaya çıkıp etkin hale gelebiliyor. Aklın en görkemli üretimi, ürettiği matematiktir. 1804-1851 yıllarında Almanya'da yaşamış olan Karl Jacobi 27 yaşında iken, 1752-1833 yılarında Fransa'da yaşamış olan Legendre'a 1831 yılında yazdığı bir mektupta, matematiği, "insan aklının onuru" olarak nitelendirmektedir. Bunu paylaşmayan birinin var olabileceğini sanmıyorum. Çünkü etrafımızda gözlediğimiz olayları, ancak matematik yeteneğimizle modelledikten sonra aklımızla işleyip bilimsel teoriler geliştirebiliyor, yeni teknolojik uygulamalar oluşturabiliyoruz. Bazılarının "bir konu ne kadar matematikselleşmiş ise o kadar bilimselleşmiştir" demelerinin dayanağı bu olsa gerek.

Milyonlarca yıl önce mağaralarda ve ormanlarda yaşamış olan atalarımızın da güncel ihtiyaçlarını karşılayan matematikleri vardı. Aslında hayvanlarda da, kendilerine özgü matematik yetenekler olduğunu söylemek abartılı olmasa gerek. Örneğin pek çok belgesel filmde görmüş olduğumuz gibi, bir avı yemekte olan bir iki sırtlan bir aslanın geldiğini görünce hemen avın başından uzaklaşır. Buna karşın, sayıları 5-6'yı bulan bir sırtlan sürüsü avının başındaki bir aslanı tehdit edip avını elinden alır. Uygarlığımızın temelini oluşturduğunu söylediğimiz matematik o ilkel halinden başlayarak, binlerce yıl süren bir evrimin sonunda olgunlaşıp bugünkü görkemli düzeyine gelmiştir.

Tarihçilerin bilebildiği kadar eski zamanlarda, Mezopotamya'da, Mısır'da, Çin'de ve Hindistan'da, o günkü güncel problemleri çözmeye yeten matematikler vardı. İlk matematik kavramlar ve işlemler, tam sayılar ile onların üzerinde yapılan basit işlemlerden ibaretti. Güncel gereksinimleri karşılamak amacıyla geliştirilmiş olan ve bugüne kadar da yeryüzünde, her tarafta geçerli olan o matematiği, "Matematik toplum içindir" deyimi ile nitelendirebiliriz.

Daha sonraki dönemde Dünya'nın bazı bölgelerinde, özellikle de eski Yunanistan'da, toplumun güncel gereksinimleri ile ilişkisi olmayan türden bir matematik de ortaya çıkmaya başladı. Üçgen, çokgen, daire, elips, hiperbol, parabol vb. geometrik şekillerin yanı sıra rasyonel sayılar bu matematiğin

---

[1] Türkiye Bilim Merkezleri Vakfı Şişli Bilim Merkezi'nde 23 Mart 2013 tarihinde Prof. Dr. Mithat İdemen tarafından yapılan konuşma.

temel ilgi alanını oluşturuyordu. Bugün çağdaş matematiğin temeli olarak düşündüğümüz aksiyom, postula ve ispat kavramları o dönemde ortaya çıktı. Bu kavramların ortaya çıkışını matematikteki ilk devrimler olarak nitelendirmek gerekir. Bu devrimleri eski Yunan matematikçilerine, özellikle de Miletli Thales (M.Ö 624-546), Samoslu Pitagoras (M.Ö 570-495) ve İskenderiyeli Euclid'e (M.Ö ≈350-300??) borçluyuz.

Pitagoras'a göre aksiyomlar ve postulalar her şeyden önce gelmelidir[2]. O devirde geliştirilmiş bulunan ve Euclid tarafından 13 ciltlik bir kitap halinde toparlanarak insanlığa miras bırakılan geometriyi bugün bile büyük hayranlık duyarak öğrenmeye çalışıyoruz[3]. O dönemde geliştirilmiş bulunan matematiğin, yüzyıllar sonra çok değişik alanlarda etkin olarak uygulanmış olmasına karşın, o günlerde uygulama ve mühendislikle ilgili olarak geliştirilmiş olduğunu asla söyleyemeyiz. Yapılanların büyük bir kısmı, "Matematik, matematik içindir" görüşüyle yapılmıştı.

Matematikteki ikinci devrim, bana göre, irrasyonel sayı kavramının ortaya çıkışıdır. Bunun kesin zamanı ve kahramanları bilinmiyor. Ama tam ve rasyonel sayıların rigör bir matematik için yeterli olmadığı fikrinin Pitagoras'da ve öğrencilerinde de var olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü o günlerin güncel konuları arasında yer alan dik üçgenlerin dik kenarlarının boyu tam sayılarla ölçüldüğünde, hipotenüsünün de tam veya rasyonel bir sayı ile ölçülebilir olup olmadığı, o günlerde tartışılıp duruyordu. Örneğin, $\sqrt{2}$ 'nin rasyonel olmadığını göstermek için yapılan basit ispatın M.Ö 5. Yüzyıl'da yaşadığı sanılan Hippasus tarafından verildiği söylenir[4] (m.ö. ≈ 500).

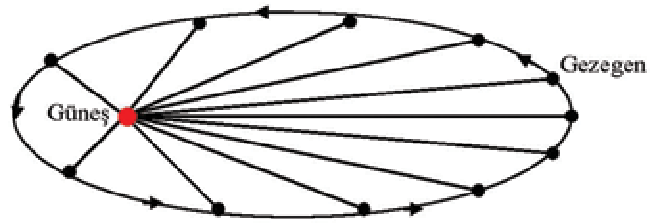
"Matematik, matematik içindir" görüşü ile geliştirilmiş bulunan o klasik Yunan Matematiğinin, 1800 yıl kadar sonra ortaya konan çok görkemli bir uygulaması, uygarlığımız bakımından son derecede önemli bir basamak durumundadır. Çok hoşlandığım o uygulamanın felsefesini ve arkasındaki hikâyeyi, matematik ayrıntılara girmeden, sizlerle paylaşmak istiyorum.

Eski günlerin bilimsel laboratuvarı sadece gökkubbeden ibaretti ve herkese açıktı. Bütün insanlar, milyonlarca yıl boyunca o kubbeyi gözlemiş; Güneş'in, Ay'ın ve diğer yıldızların periyodik hareketlerini izlemiş ve kendilerince yorumlar yapmışlardı. Bir ara dine dayalı argümanlar da tartışmaya katılmış; Dünya-merkezli (Anaximander, Parmenides, Ptolema), Güneş-merkezli (Plato, Aristotle, Pythagoras, Copernicus) ve ne Dünya ne de Güneş-merkezli (Helio-geocentric, Thyho Brahe[5]) evren sistemleri ortaya atılmıştı. En sonunda 1609'da, Brahe'nin Asistanı Kepler[6]'in, gözlemlere dayanarak, sezgi ile ortaya attığı şu görüş bilim çevrelerinde geniş kabul görmüştü:

1- Bütün gezegenler Güneş'in etrafında, bir odağında Güneş'in yer aldığı elips şeklindeki düzlemsel eğriler üzerinde dönmektedirler.

2- Güneş'i gezegene birleştiren doğru eşit zaman aralıklarında eşit alanlar süpürür.

3- Gezegenin periyodu (= p) ile elipsin uzun çapı (= 2a) arasında $p^2 = K a^3$ gibi bir ilişki vardır. Buradaki K evrensel (gezegenden bağımsız) bir sabittir.



Kepler'in tamamen bir matematik teorem gibi söylenmiş bulunan bu iddiaları, matematiğin doğal bilimlere, Archimed[7] prensibinden sonra gelen ilk uygulaması olarak düşünülebilir. Bunlar sadece gözlemlere dayanılarak söylenmiş oldukları, matematik işlemlerle kanıtlanmış bulunmadıkları için, o günlerde sadece tahmin (=conjecture) niteliğinde idiler. Ama o iddiaları bugün Newton mekaniğinin sonuçları olarak, oldukça kolay sayılabilecek işlemlerle kesin olarak ispat edebilmekteyiz. İlginç olan şudur ki; Kepler'in dediklerini ispat etmek için dayandığımız yasayı Newton (1642-1742) tersine, Kepler'in dediklerini doğru kabul ederek keşfetmişti. Bunun için Newton;

- Galile (1564-1642) tarafından keşfedilmiş olan ve yeryüzünde düşen bir cismin aldığı yol ile zaman arasındaki ilişkiyi veren ifadeyi ve

- M. Ö 262-190 yılları arasında yaşamış olan Apollonius[8]'un elips için ispatlamış olduğu teoremleri

hayranlık uyandıran bir maharetle kullanarak Güneş'in gezegenlere uyguladığı çekim kuvvetinin uzaklığın karesi ile ters orantılı olduğunu 1684 yılında kanıtlamıştı. Apollonius o günlerde elipsin özelliklerini incelerken, 1800 yıl sonra uygarlık için çok önemli olacak bir uygulamaya temel hazırlamakta olduğunu tahmin etmemişti şüphesiz.

Uygarlık tarihi bakımından çok büyük öneme sahip bulunan bu konuyu, Michael White'dan[9] aktaracağım bir hikâye ile kapatmak istiyorum. Ama daha önce, geçmiş dönemlerde insanoğlunun matematiğe verdiği rol bakımından çok önemli saydığım bir hususa değinmek istiyorum.

---

[2] Aksiyom: Doğru olduğu herkes tarafından kabul edilen önerme.
Postula: Doğruluğu mantıki olarak kabul edildiği halde, doğruluğu ya da yanlışlığı ispatlanamayan önerme.

[3] Geçen yüzyılın tanınmış filozoflarından Bertrand Russel, Euclid'in bu Elementler adlı eserini "bugüne kadar yazılmış" en büyük kitap olarak değerlendirmektedir.

[4] Pisagor'un irrasyonel sayıları Evren'in düzenine aykırı bulduğu ve bu nedenle, öğrencilerine bu sayıların varlığından söz etmeyi yasaklamış olduğu söylenir. Rivayete göre, Hippapus'u da $\sqrt{2}$ için verdiği ispat nedeniyle suda boğdurarak öldürtmüştür.

[5] Thyho Brahe (1546-1601) dini baskılar nedeniyle Kopernik'in sistemini benimsememiş, orta çizgide yer alan kendi sistemini önermişti.

[6] Kepler Güneş'i gözlediği zaman gezegenleri, gezegenleri gözlediği zaman da Güneş'i göremiyordu. Buna rağmen yörüngenin elips olduğunu ve Güneş'in odakta yer aldığını söylemek için dahiyane bir sezgiye sahip olmak gerekir.

[7] Archimed (M.Ö. 287-217)

[8] Apollonius M.Ö. 262'de Perge'de (Antalya) doğmuş, M.Ö 190'da İskenderiye'de ölmüştür.

[9] Michael White, Isaac Newton, The last sorcerer , s: 190-191, Helix Books, NewYork, 1997.

İnsanlar gezegenlerin kapalı eğriler üzerinde dönmekte olduklarını oldukça erken fark etmişlerdi, ama bu dönüşün kuralını keşfedememişlerdi. O günlerde yaşamış olan çok sayıdaki bilgine göre (bunlar arasında Descartes de vardır) doğal hareket düzgün doğrusal hareketti. O halde, nasıl oluyor da gezegen bir doğru üzerinde uzaklaşıp gideceğine bir çember (veya elips) üzerinde dönüp durmaktaydı? 16. ve 17. yüzyılların en tartışmalı konusu bu idi. Büyük bir cesaretle, gezegenlerin Güneş merkezli çemberler üzerinde dönmekte olduğunu iddia eden ve bu nedenle, Aydınlanma Çağı'nın ve bilimsel devrimlerin öncüleri arasında sayılan Copernicus[10], aslında bir matematikçi olmasına rağmen, sözü edilen kuralı matematiğin dışında aramak gerektiği düşüncesindeydi[11]. Çünkü ona göre, matematik sadece matematikçiler içindi[12]. Yani bizzat matematikçiler bile, bir zamanlar, matematiğin uygarlığımızın gelişmesinde önemli rol oynayabileceğini düşünemiyordu. Buna karşın Kepler ve Galile, matematiğin evreni kavramımızda önemli rol yüklenebileceğini savunuyorlardı.

Şimdi hikâyemize, 1684 yılına dönelim. Ocak ayında, Londra'daki bir kahvede, üç arkadaş (Robert Hooke, Sir Christopher Wren ve Edmund Halley) sohbet etmektedirler. Hooke, Newton'un rakibi, hatta düşmanı olarak tanınmaktadır. Sohbet esnasında Halley, gezegenlerin Güneş etrafındaki hareketini sağlayan etkinin uzaklığın karesi ile ters orantılı olup olmadığını merak ettiğini söyler. Karşısındakilerin kendisini sessizce dinlemeye devam edeceklerini beklerken, Hooke'un kahkahalarla güldüğünü görür ve çok şaşırır. Hooke, bu prensiple gezegenlerin hareketlerine ilişkin bütün yasaların kanıtlanabileceğini iddia eder. Wren ise bu görüşün bir prensip olarak ortaya sürülmesinin oldukça kolay, fakat ispat edilmesinin başka bir şey olduğunu belirtir. Bunun üzerine Hooke, birkaç yıl önce onu kanıtladığını, fakat sır olarak herkesten sakladığını söyler. Bunun nedenini de, herkes onunla ilgilensin, başaramasın, kendisi açıkladığında ne kadar önemli bir şey yapmış olduğu anlaşılsın, şeklinde açıklar. Sohbet böyle devam ederken Wren, Hooke'a ve Halley'e döner, "Size iki ay mühlet veriyorum. Hanginiz bu zaman zarfında beni ikna edici bir ispat getirirseniz, ona 40 şilin değerinde bir kitap hediye edeceğim" der. Kahveden bu beklenti ile ayrılırlar, ama Wren'in ve Halley'in sabırsızlıkla beklemelerine karşın Hooke'dan hiç ses çıkmaz. Konuya aşırı ilgi duyan ve Hooke'dan umudunu kesen Halley, aynı konu ile ilgilendiğini bildiği Newton'la karşı karşıya konuşmaya karar verir ve bu amaçla Cambridge'e gider. Cambridge'de Halley'in Newton'a sorusu şöyle olur: "Planetleri Güneş'e doğru çeken kuvvetin uzaklığın karesi ile ters orantılı olduğu varsayılsa yörünge nasıl olur?" Bu soruya Newton'un cevabı, aniden "Elips" olur. Halley bunu nereden bildiğini sorunca da, "Hesaplamıştım" der. Halley hesapları görmek ister. Newton, kâğıtlarını karıştırır, aradığını bulamaz, ama söz verir; onları tekrar yapacaktır. Üç ay sonra, ikisinin de dostu olan bir matematikçi, De Motu Corporum in Gyrum (On the Motion of Revolution Bodies) başlıklı 9 sayfalık bir metni Halley'e getirir. Bu metin 2 yıl sonra Latince yayınlanacak olan Philosophiae Naturalis Principia Mathematica'nın temelidir.

Yukarıda sözü edilen kitap, çağdaş bilimlerin öncüsü olarak kabul edilen Newton Mekaniğinin temellerinin ilk defa açıklanmış bulunduğu eserdir. Newton'un gelmiş geçmiş en büyük üç matematikçiden biri olarak kabul edilmesinde, geliştirmiş olduğu limit ve türev kavramlarının yanı sıra bu mekaniğin de büyük rolü vardır. Bu nedenle, hepimizin Newton'a ve O'na dayanak hazırlamış olan Kepler'e minnet borcumuz vardır[13].

Matematikteki üçüncü devrim, bana göre, limit ve türev (diferansiyel) kavramlarının ortaya çıkışıdır. Bunlara erişebilmek için Pitagoras'dan sonra 2 bin yıl kadar daha beklemek, Newton (1642-1729)'un ve Leibnitz'in (1649-1716) yaşadığı çağa erişmek gerekecektir. Çok derin soyutlama yeteneğine sahip olan Newton, limit kavramıyla birlikte (20 Mayıs 1665'de) diferansiyel kavramını da matematiğe kazandırmış ve bu kavram aracılığıyla da bugün kendi adıyla anılan, rasyonel mekaniğin temellerini atmıştı[14]. Türev kavramının ortaya çıkmış olması, doğal olarak, analitik geometri, diferansiyel geometri, integral, diferansiyel denklem ve integral denklem kavramlarını da peşinden sürükledi. O günleri gören insanoğlu artık kendi aklı ile övünüyor, doğaya meydan okuyordu. Rasyonel mekaniğin bir yandan değişik mühendislik problemlerinin çözümündeki, diğer yandan da astronomideki uygulamaları hem insanın günlük yaşamını değiştiriyor, hem de doğayı daha iyi tanımasına yardım ediyordu. Kepler'in 80 yıl kadar önce gözlemlere dayanarak söylediği yasalar, artık Evrensel Çekim Yasası'nın ispatlanan sonuçları olarak mekanik biliminde yer alıyordu.

Sosyal bilimcilerin Aydınlanma Çağı (18. Yüzyıl!) olarak adlandırdıkları romantik dönemde ve onu izleyen yüzyılda matematiğin sağladığı en görkemli başarı, bence, Foucault (1819-1868) Sarkacı olarak bilim tarihine geçmiş olan olaydır. Newton'un (ve Galile'nin!) sahip olduğu dahiyane soyutlama yeteneğini kavramamıza yardımcı olabileceği düşüncesiyle bu sarkaç olayından da kısaca söz etmek istiyorum. Bilindiği gibi, o günlerde bilim çevreleri ile inanç çevrelerini karşı karşıya getiren konu; "Dünya'nın duruyor mu, yoksa kendi ekseni etrafında dönüyor mu" olduğu konusuydu. İnanç çevreleri Tanrı'nın vekilleri gibi konuştuklarından, bilim adamları bu tartışmalarda hep ürkek konuşuyor ve yenik düşüyorlardı. Çünkü Dünya'nın kendi ekseni etrafında dönmekte olduğunu inanç sahiplerine gösterebilmek için, onlarla birlikte Dünya'nın dışına çıkmak, çok uzaklara gidip Dünya'yı oradan gözlemek gerekiyordu. Bu ise görünürde, hayal edilemeyecek bir şeydi. Görünürde öyleydi ama aslında öyle değildi; çünkü Newton mekaniği ile artık hayaller bilime dönüşmüştü.

1851 yılında Foucault, uzun bir iple asılı olan ve serbest salınım yapan bir topacın yatay düzlemdeki izini inceleyerek Dünya'nın kendi ekseni etrafında dönmekte olduğunu, din adamlarının da reddedemeyecekleri biçimde kanıtlamıştı. Bunun için, merkezi Dünya'nın merkezinde olan ve eksenle-

[10] Nicolaus Copernicus (19 Şubat 1473-25 Mayıs 1543) bu iddiası nedeniyle ölümünden bir gün önce Roma Katolik Kilisesi tarafından aforoz edilmişti.

[11] J.-C. Pecker, Understanding the Heavens, Springer-Verlag, Heildelberg, 2001, s.252.

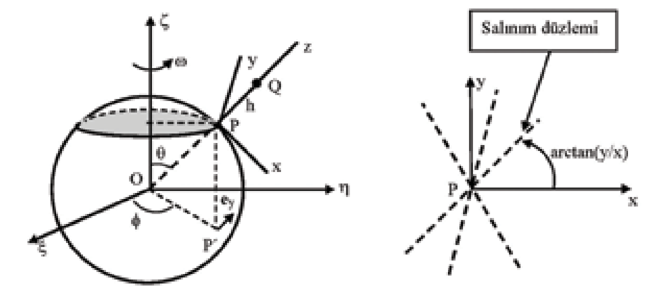
[12] Kopernik'in Mathemata mathematicis scributur (Matematik matematikçiler için yazılır) sözü bilim çevrelerince atasözü gibi hatırlanmaktadır.

[13] Kepler dini baskılar nedeniyle yaşamının son döneminde çok sıkıntı çekmiştir.

[14] Bazı tarihçiler mekaniğin temellerinin Newton tarafından 1666'da keşfedilmiş olduğunu, fakat Newton'un yayınlamak için 21 yıl beklediğini iddia ederler (!!!).

ri çok uzaklardaki üç yıldıza yönelmiş bulunan bir Oξηζ koordinat sistemini, varlığı Newton yasaları ile postule edilmiş bulunan soyut (Galile) referans sistemi olarak kabul etmiş ve o koordinat sisteminde topacın hareketini tanımlayan diferansiyel denklemleri yazmıştı. Daha sonra bu denklemleri Dünya'ya bağlı bir Pxyz koordinat sistemine dönüştürüp çözerek, yatay düzlemdeki izin peryodik biçimde dönmesi gerektiği sonucuna varmıştı. Aynı yıl Paris'de, Panthéon Kilisesi'nde, seçkin bilim ve devlet adamlarının huzurunda yapılan bir deney bu hesaplarla uyuşunca, Tanrı'nın vekilleri de sonucu kabullenmek zorunda kalmışlardı. Çünkü Newton'un mekaniğinden ve matematikten, onların astronomi ve mühendislik alanındaki görkemli başarılarını bilen hiç kimse şüphe etmiyordu. Bu olay, bir yandan Newton mekaniğinin ve o günkü matematiğin gücü konusunda ortaya konmuş olan en görkemli kanıt, diğer yandan da deneylerden önce gelen teorik sonuçlara ilişkin bir örnektir.

Foucault Sarkacı'na ilişkin detay



$$\omega^2 = \left[\frac{2\pi}{T}\right]^2 = \left[\frac{2\pi}{24\times.3600}\right]^2 << 1 \Rightarrow$$

$$x'' - 2\,y'\,\omega\cos\theta + (g/h)\,x = 0, \qquad y'' + 2\,x'\,\omega\cos\theta + (g/h)\,y = 0$$

$$\Rightarrow\ y/x = \cot\,[t\,\omega\cos\theta - \arctan\{y(0)/x(0)\}]$$

$$\Rightarrow \text{peryot} = (2\pi)/(\omega\cos\theta) = \frac{24}{\cos\theta}\ \text{saat}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \text{peryot} \approx 34\ \text{saat.}$$

Türev kavramı ve onun doğal uzantısı durumundaki analitik geometri, diferansiyel geometri, integral hesap, adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemler, varyasyonlar hesabı vb. konular, 18 ve 19. yüzyıllar boyunca, teknolojik gereksinimlerin zorlamalarından da etkilenerek, büyük gelişim gösterdiler ve uygarlığın gelişmesine katkılarda bulundular. Bununla beraber, 16. Yüzyıl'ın ortalarından beri süre gelen bir sıkıntı henüz bertaraf edilememişti. O sıkıntı, bir negatif sayıya karekök işlemi uygulanmak zorunda kalındığında ortaya çıkıyordu. O günlerde sahip olunan kavramlara göre anlamsız sayılan bu durum, özellikle fizik ve mühendislik alanlarındaki uygulamalarda çok sık ortaya çıkıyor ve sıkıntı yaratıyordu. Durumun matematik bakımından anlamsız sayılmasına rağmen, mühendisler ipin ucunu bırakmamışlar, bilinen hesap tekniklerini biçimsel olarak uygulayarak sonuçlar üretmeye devam etmişlerdi. Böylece (-1)'in karekökünün karesi söz konusu olduğunda (-1)'i, küpü söz konusu olduğunda da eksi işaretle kendisini yazarak işlemleri sürdürüyorlardı. Onları şaşırtan şu idi ki; böylece elde edilen sonuçlar beklentilere ve deneylere her zaman uygun oluyordu. Bu türden uygulamalar 18. Yüzyıl'ın ortalarına kadar, 3 yüzyıl boyunca, devam edip durdu. Böylece elde edilen sonuçların doğru olduğunu gören o dönemin büyük matematikçileri, bu hesap tekniğine aksiyomatik bir nitelik kazandırarak matematiğe dahil etmeye çalıştılar. Euler (1707-1783), Cauchy (1789-1857), Riemann (1826-1866), Weierstrass (1815-1897) ve diğerlerinin dahiyane çabaları matematikte yeni (dördüncü) bir devrimin, bana göre en büyük devrimin gerçekleşmesini sağladı. Bugün kompleks analiz olarak adlandırdığımız konu, o devrimin ürünüdür. Ona göre sayılar bir doğrunun üzerindeki noktalar gibi sıralanmazlar, bir düzlemin üzerindeki noktalar gibi dağılırlar ve bilinen matematik kuralları bunların üzerine aynen reel sayılarda olduğu gibi uygulanırlar. Sadece reel sayılarla ilgilenen fizikçiler, mühendisler ve diğer doğal bilimciler de hesaplarını yaparken bu hususu göz önünde bulundurmalı, böylece elde edilecek olan sonuçları reel eksen adı verilen doğrunun üzerinde durarak değerlendirmelidirler. Bu görüşle, reel eksen üzerinde ifade edilmiş olan fakat uzun yıllar boyunca çözülemeden bekleyen pek çok problem hemen çözüme kavuştu. Bunlar arasında, cebir'in esas teoremi olarak bilinen ve "n'yinci dereceden bir polinomun n tane sıfır noktası vardır", şeklinde ifade edilen teorem ile tam sayıların negatif kuvvetlerinin toplamından oluşan

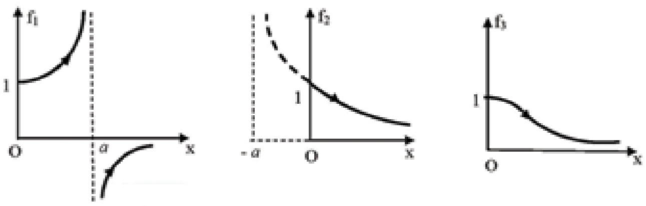
$$\sum_1^\infty n^{-2p}\,,\ \sum_1^\infty(-1)^n n^{-2p}\,,\ \sum_1^\infty(-1)^n n^{-(2p+1)}$$

serileri sayılabilir. Bugün öğrencilere verilen sınavlarda kolay sorular arasında yer alan bu türden problemler uzun yıllar boyunca büyük matematikçileri uğraştırıp durmuştu. 18. Yüzyıl'ın başlarında Euler (1707-1783), kompleks sayı kavramını kullanmadan, ilk toplamın değerini p'nin 1 ve 2'ye eşit değerleri için bulmayı başarmıştı. Bu başarı Euler'in, yaşadığı çağın en büyük matematikçisi olarak tanınmasında, diğer başarılarından daha fazla etkin olmuştu[15]. Kompleks analizin reel problemlerin çözümündeki uygulamalarına örnek olmak üzere, özellikle integral dönüşüm kavramı ile analitik devam kavramına ve onların karma sınır koşulları altında sağlanan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümündeki uygulamalarına dikkati çekmek isterim. Bugün, "2 yüzyıl kadar önce kompleks analiz geliştirilememiş olsaydı, fizik ve değişik mühendislik dallarındaki güncel düzeyimiz asla bu görünümünde olamazdı" demenin abartılı bir iddia olacağını hiç düşünmüyorum.

Bu konuyu öğrencilere anlatırken, konunun önemini vurgulamak amacıyla ilk dersde onlara verdiğim iki basit örnekten sizlere de söz etmek istiyorum. Onlara, a bir pozitif sayı olmak üzere, pozitif x ler için tanımlanmış $f_1(x) = a^2/(a^2 - x^2)$, $f_2(x) = a/(a+x)$ ve $f_3(x) = a^2/(a^2 + x^2)$ fonksiyonlarının grafiklerini çizmelerini ve $x = 0$ civarında yazılmış Taylor açılımlarının geçerlilik bölgelerini, bu bölgeleri neyin kontrol ettiğini bu grafiklere bakarak belirlemeye çalışmalarını, söylüyorum. $f_1(x)$'in grafiğine bakarak, söz konusu bölgenin $(0, a)$ aralığı olduğunu ve bu bölgenin sınırlarının $x = a$ noktasından geçen asimptot tarafından kontrol edildiğini hemen söyleyebiliyorlar; ama diğerleri için, özellikle de üçüncü fonksiyon için, hiçbir şey söyleyemiyorlar. Oysa bu fonksiyonlar kompleks z-düzleminde tanımlanmış düşünülürse, Taylor açılımlarının geçerlilik bölgeleri daireler olur ve söz konusu dairelerin genişlikleri orijine en yakın tekil

[15] Şurası ilginçtir ki; $\sum_1^\infty n^{-(2p+1)}$ toplamı p nin hiç bir değeri için bugün de bilinmemektedir.

nokta aracılığıyla belirlenir. Bu nokta, $f_1(z)$ için reel eksen üzerindeki $z = \pm a$, $f_2(z)$ için gene reel eksen üzerindeki $z = -a$, $f_3(z)$ için ise sanal eksen üzerindeki $z = \pm ia$ noktalarıdır. Bu nedenle, reel eksenin pozitif yarısı üzerinde yazılan Taylor serilerinin üçü de sadece $[0, a)$ aralığında yakınsaktır.

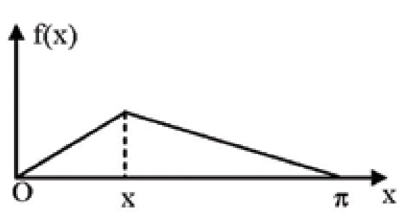


Öğrencilere gösterdiğim ikinci basit örnek; $x = 0$ civarında her mertebeden sürekli türevlere sahip $f(x) = \sin x \in C^\infty(-\infty, \infty)$ ve $g(x) = \sin x + \exp\{-1/x^2\} \in C^\infty(-\infty, \infty)$ fonksiyonlarının Taylor açılımları ile ilgili. Bu fonksiyonları $x = 0$ civarında Taylor serisine açmalarını ve sonucu açıklamalarını istiyorum. Hesapların sonunda iki fonksiyon için de aynı açılımı buluyorlar, ama sonucu açıklayamıyorlar. Çünkü reel eksen üzerinden bakıldığında her iki fonksiyon için de çok masum görünen $x=0$ noktası, kompleks z- düzleminden bakıldığında g(z) fonksiyonu için çok tehlikeli bir nokta (esaslı tekil nokta) durumundadır. Bu nedenle, $z=0$ civarında g(z)'nin seri açılımı hem pozitif hem de negatif kuvvetler içerir (Laurent açılımı). Biraz önce sözü edilen ve aynı olduğu söylenen seri pozitif kuvvetlerden oluşan kısımdır.

Onlara, bu örneklerde sözü edilen bütün fonksiyonları kompleks düzlemde tanımlanmış, ama sadece reel eksen üzerindeki noktalarda değerlendiriliyor olarak düşünürlerse, her şeyin tamamen berrak olarak açıklanabileceğini ve hesaplamalarda hatalar yapılmayacağını anlatmaya çalışıyorum. Böylece onların da matematik analizin ancak kompleks düzlemde yapıldığında daha berrak ve eksiksiz olabileceğini kavradığını düşünüyorum.

Matematikte yaşanan önemli (beşinci!) devrimlerden biri de kısmi türevli diferansiyel denklemlere ilişkin sınır-değer problemlerinin çözümündeki zorluklar nedeniyle ortaya çıktı. 19. Yüzyıl mühendislik ve fizik bakımından çok önemli sayılan, çok sayıdaki sınır-değer probleminin çözüme kavuşturulduğu yıllardı. O yıllarda Napolyon'un ordusunda mühendis subay olarak görev yapan ve bir ısı iletimi problemini çözmeğe çalışan J. Fourier (1768-1830), çözümü, diferansiyel denklemi sağlayan çok sayıdaki trigonometrik fonksiyonun toplamı şeklinde oluşturmaya çalışmıştı (1822). Bunun için, trigonometrik fonksiyonların önünde yer alan katsayıları sınır koşullarını sağlayacak şekilde belirlemeye çalıştı. Toplama sonlu sayıda terim katarak bulduğu ifadeler oldukça iyi sonuçlar veriyordu, ama yöntemi matematikçilerin gözünde tamamen tutarsızdı.

$$f(x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$$

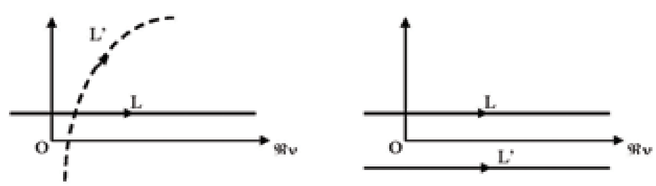


Çünkü bu yöntemi daha önce tellerin titreşimini incelemek amacıyla kullanmış olan Daniel Bernoulli'ye (1700-1782) d'Alembert (1717-1783) ve Euler şiddetle karşı çıkmışlardı. Onlara göre, toplama dahil edilen terimlerin hepsi ilgilenilen aralıkta sürekli ve sürekli türevlere sahip fonksiyonlardı, ama sağlatmaya kalkışılan sınır-koşulu veya türevi süreksizdi. Bu kabul edilebilir bir durum değildi. Bazı matematikçiler karşı çıkmışlardı, ama mühendisler Fourier'nin yöntemini çok benimsediler ve yaygın biçimde kullanarak önemli sonuçlar elde ettiler. Yöntemin önemini kavrayan L. Dirichlet (1805-1855), 7 yıl sonra, Fourier'nin kullandığı serinin, süreksizlik noktalarında fonksiyonun sağdan ve soldan gözlenen limitlerinin ortalamasını verdiğini ispat ederek bu yöntemi sağlam temellere oturtup matematiğe dahil etmeyi başardı (1829). Sonuç, bugün öz-fonksiyon serilerine açılım veya spektral analiz olarak adlandırdığımız ve çok değişik yerlerde bol bol kullandığımız kavramın doğuşu oldu. Spektrumun sürekli olduğu hallerde bu açılım değişik çekirdeklerle yapılan integral dönüşümlere indirgenmektedir:

$$u(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \qquad x \in (0,b)$$

$$u(x) = \int_L \Phi(x, \nu)\, A(\nu)\, d\nu, \quad x \in (0, \infty) \text{ veya } x \in (-\infty, \infty).$$

Buradaki L integrasyon çizgisi, genellikle, kompleks ν-düzleminde sanal veya reel eksene paralel olan bir (veya iki!) doğrudur. Dönüşüm integrallerinin kompleks düzlemdeki regülerlik özellikleri de göz önünde bulundurularak yapılan uygulamalar, bir zamanlar çok zormuş gibi görünen pek çok problemin oldukça kolay bir şekilde çözülmesini sağladı. İntegral dönüşüm tekniklerinin sağladığı bir diğer avantaj da ters dönüşüm formüllerinde gözüken integrasyon çizgilerinin, Cauchy teoremine dayanılarak, uygun biçimde değiştirilebilir olmasıydı. Böylece, çözüm diye bulunan fakat olayı aydınlatmaya elverişli biçimde olmayan ifadeler fiziksel yoruma elverişli hallere kolayca dönüştürülebildi. Daha sonraki yıllarda ortaya çıkan lineer uzay, özellikle de Hilbert Uzayı kavramının temelinde de Fourier'nin o basit çözüm tekniğinin yer aldığını söyleyebiliriz.



Bana göre matematikteki son devrim (altıncı devrim) geçen yüzyılın ortalarında, 1950'de yaşandı. Ama o devrimi hazırlayan nedenler de her devrimde olduğu gibi, daha gerilerde, 19. Yüzyıl'ın ikinci yarısından beri yaşanmakta olan sıkıntılardaydı. Benim çok önemsediğim ve zarif bulduğum bu konuyu sizlere somut bir örnek üzerinde anlatmayı tercih ediyorum.

Bilindiği gibi, 1873 yılında Maxwell (1831-1879), 40 yıl kadar önce Faraday'ın (1791-1867) İngiltere'de keşfetmiş olduğu yasayı, ondan da 10 yıl kadar önce Ampère'in (1775-1836) Fransa'da keşfetmiş olduğu yasa ile birleştiren bir diferansiyel denklem sistemi yazmış ve hem elektrik hem de magnetik olayların bu denklemlerle çözülerek aydınlatılabileceğini iddia etmişti. Maxwell bu denklemlere, ne Faraday'ın ne de Ampère'in yasalarında yer alan bir terim daha (yani: **D**) eklemişti. Maxwell'in dehasının bir göstergesi olarak yorumlanması gereken bu terim elektromagnetik olayın bir hiperbolik denklem sistemi sağladığını ve dolayısıyla sonlu bir hızla yayılan bir dalga olayı olduğunu gösteriyor ve çok tartışılıyordu. Çünkü söz konusu dalgadan fizikçilerin ve mühendislerin haberi yoktu. Olayın gerçekten dalga niteliğinde olduğu, başka bir deyişle, Maxwell denklemlerinin iddia ettiği dalgaların gerçekten var olduğu ancak 14 yıl sonra, 1887'de Hertz'in (1857-1894) Almanya'da yapmış olduğu tarihi deneyle kanıtlanmıştı. Teorinin deneyin önünde geldiği hale ilişkin önemli bir örnek durumunda olan Maxwell denklemleri, o günlerden bu yana geçen 140 yıl süresince entelektüel çabalarımızın en önde gelen konularından biri oldu ve uygarlığın gelişim yönünü değiştirdi. İnsanoğlunun kaderini değiştirmiş olan o denklemler, bugün kullanmakta olduğumuz notasyonla yazıldığında şöyledir:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} = \mathbf{J}, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = 0,$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0.$$

Burada görünen **E, D, H** ve **B** elektromagnetik alanın bileşenleri, t de zamandır. Denklemlerin sağında yer alan ρ ve **J** ise olayı yaratan kaynağa ilişkin (hacimsel) yoğunluklardır. Kaynağı bilinen her olay bu denklemlerin, uzaya ilişkin bünye bağıntıları da göz önüne alınarak, çözülmesi ile açıklanır. Yalnız, burada şöyle bir sıkıntının varlığı hemen gözlenmektedir: Kaynak bir tek noktaya veya çizgiye veyahut da yüzeye yoğunlaşmış ise, ρ ve **J** denklemlere nasıl yerleştirilecektir? Daha da önemlisi, kaynaklar arasında dipol adı verilen ve üst üste yerleşmiş zıt işaretli iki yükten oluştuğu varsayılanlar da varsa, onlar denklemlerde nasıl yer alacaktır? Sıkıntı bununla da kalmıyor. Değişik bünyeye sahip bölgelerin (cisimlerin) arakesiti üzerinde alanın bazı bileşenlerinin süreksizlikler gösterdiği deneylerle gözlenmiş durumdadır. Bunları, arakesit yüzeylerinde biriken yükler veya akımlar da etkilemektedir. Bu süreksizlikleri ifade eden bağıntılar, Maxwell denklemleri çözülürken sınır koşulları olarak değerlendirilirler. Bunların da keyfi olarak ileri sürülemeyeceği, Maxwell denklemlerinden hareket edilerek çıkarılması gerektiği açıktır. İşte bu sorular 75 yıl kadar uzun bir süre hep açıkta, cevapsız durdu. Bazı fizikçiler, matematiği zorlayarak, bazı basit hallerde deneylere uyacak sonuçları matematikle üretiyormuş gibi görünmek için, teoremleri, geçerlilik sınırlarının ötesinde kullanıp sorulara kısmi cevaplar üretmeye yöneldiler. Görünürde işler iyi gidiyor gibiydi ama ortaya çıkan yeni malzemeler ve yapılar karşısında duyulan yetersizlik de apaçık ortadaydı. Aslında sorun sadece Maxwell denklemleri ile ilişkili de değildi. Fiziğin diğer konularında, örneğin mekanikte de bu türden sorunlar vardı. Maxwell denklemlerinin ortaya çıkışından daha önce R.C. Kirchoff (1824-1887), bir noktaya yoğunlaşmış bir kuvveti ifade edebilmek için

$$F = \left(\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\right) e^{-\mu^2 x^2} \quad (\mu \text{ ist eine sehr grosse positive Constante}).$$

yazmayı, 1930 yılında da P.A.M. Dirac (1902-1984), noktasal yükü belirtmek amacıyla, bugün kendi adıyla anılan delta fonksiyonunu kullanmayı tercih etmişti. Dirac'ın deltası aşağıdaki özelliklere sahipti:

$$\delta(x) = 0 \text{ eğer } x \neq 0 \text{ ise}$$

$$\delta(x) = \infty \text{ eğer } x = 0 \text{ ise}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

Dikkati çekmek isterim ki; $\mu \to \infty$ yapıldığında Kirchoff'un göz önüne aldığı kuvvet Dirac'ın deltası gibi davranmaktadır. Matematikçilerin, "Bu özellikler fonksiyon tanımıyla bağdaşmaz" diyerek itibar etmedikleri delta fonksiyonu diğer fizikçiler ve mühendisler tarafından çok benimsendi ve yaygın biçimde kullanılmaya başlandı. Delta fonksiyonu kullanılarak korkuyla üretilen sonuçlar da, 3 yüzyıl kadar önce (-1)'in karekökünün korkuyla kullanılmasıyla üretilmiş bulunanlar gibi, deneylere uygun çıkıyor ve güven veriyordu. Bundan cesaret alan Laurent Schwartz (1915-2002), Kirchoff'un ve Dirac'ın gösterilimlerine sağlam (aksiyomatik) bir temel sağlamak amacıyla kolları sıvadı ve yeni bir devrimi başardı. 1950 yılında ortaya attığı distribüsyon kavramı bugün matematiğin değişik dallarında, özellikle de diferansiyel denklemler ve kontrol konularında çok yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Aynı yılda Schwartz'a Fields Madalyası kazandıran ve genelleştirilmiş fonksiyonlar olarak da bilinen bu elemanlar, kompleks sayı kavramından sonra matematiğin gördüğü en büyük genişleme ve en büyük devrim olmuştu.

Şimdi başa, bu konuya giriş yaptığımız Maxwell denklemlerine dönelim. Orada sözünü ettiğim soruları, matematiği zorlamadan cevaplayabilmek için Maxwell denklemlerine bir varsayım eklemek gerekecek ve yetecektir:

> "Maxwell denklemleri dört boyutlu uzayın bütününde distribüsyon anlamında geçerlidir."[16].

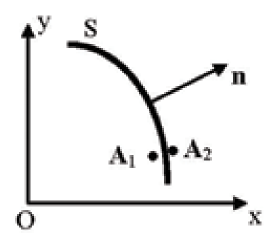
Bu halde, örneğin noktasal yükler ve dipollar denklemlere aşağıdaki gibi girecek, süreksizliklerin söz konusu olduğu durumlarda da diferansiyel işlemler aşağıdaki gibi değerlendirilecektir:

$$\rho = Q\,\delta(x-\alpha)\,\delta(y-\beta)\,\delta(z-\gamma) \quad \text{(basit yük)}$$

$$\rho_1 = -\,\mathbf{p}.\mathrm{grad}[\delta(x-\alpha)\delta(y-\beta)\delta(z-\gamma)] \quad \text{(momenti } \mathbf{p} \text{ olan dipol)}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \{\mathrm{div}\mathbf{A}\} + [[\mathbf{n}.\mathbf{A}]]\,\delta(S), \quad [[\,f\,]] = f_2 - f_1$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \{\mathrm{rot}\mathbf{A}\} + [[\mathbf{n} \times \mathbf{A}]]\,\delta(S).$$



Burada, **A**'nın sınırlı olduğu ve süreksizlik yüzeyinin (= S'nin) dışında sürekli kısmi türevlere sahip bulunduğu varsayılıyor. Yaylı parantez içinde yer alan ifadeler S'nin dışında, her yerde tanımlı olan klasik ifadeler, [[.]] içinde yer alan ifadeler ise S üzerinde gözlenen süreksizlik miktarlarıdır. δ(S) ile "S yüzeyinde yoğunlaşmış, sıfırıncı mertebeden distribüsyon" gösterilmektedir. Burada şu hususa da dikkati çekmek gerekir ki; biraz önce sözünü ettiğimiz varsayım sadece kaynak

[16] M. İdemen, The Maxwell equations in the sense of distributions, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol.21, pp:736-738, 1973.

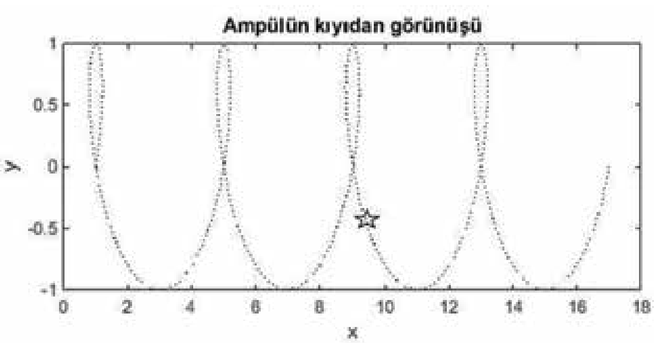
yoğunluklarının değil, alanın bileşenlerinin de distribüsyon olduğunu, yani tekillik içerdiğini iddia eder. Bu nedenle, örneğin elektrik alanı gösteren **E**'yi de

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{E}\} + \sum_{k=0} \mathbf{E}_k \delta^{(k)}(S)$$

şeklinde düşünmek gerekir. Bu görüşle yapılan analizler, elektromagnetik alan problemlerini modellemek üzere ileri sürülmüş bulunan (veya sürülecek olan) sınır koşullarının ne derecede kabul edilebilir olduğunu anlamak bakımından çok önemli sonuçlar ortaya çıkarmıştır.[17]

Yukarıdaki kısa açıklamalar gösteriyor ki; bazen fizik, mühendislik ve benzeri dallardaki uygulamaların ortaya koyduğu sıkıntılar matematikteki büyük devrimlerin kışkırtıcısı oluyor, bazen de tersine, matematikteki gelişmeler fizik ve mühendislik için yol gösterici (haberci) rolü oynuyor. Şimdi size son olarak, matematiğimizin uygarlığımıza yapmış olduğu ve benim çok zarif bulduğum başka bir katkıdan daha söz etmek istiyorum. Bunun fizik ve teknolojik olduğu kadar felsefi yönü de son derecede önemlidir.

Karanlık bir gecede, bir derede sabit bir hızla ilerlemekte olan bir sandalın tepesinde bir ampul yanıyor olsun. Ampulün a yarıçaplı bir çember üzerinde sabit bir açısal hızla dönmekte olduğunu varsayalım. Kıyıdaki gözlemciler; bir noktasal ışığın dere boyunca, aşağıdaki şekilde görünene benzeyen bir eğri üzerinde hareket ettiğini söylerler. Bu eğriyi matematik olarak tanımlayabilmek gayet kolaydır. Bunun için, biri sandala diğeri de kıyıya bağlı iki koordinat (referans) sistemi tanımlayarak olayı bu sistemlerde yazıp birbirine dönüştürmek gerekir. Sandala bağlı O'(x', y', z') sisteminde ampulün koordinatları $x' = a\cos\omega t$, $y' = a\sin\omega t$ ve $z' = 0$ olsun. Ampulün kıyıdaki O (x, y, z) sistemindeki koordinatlarını bulmak için (x, y, z) koordinatlarını (x', y', z')'ye bağlayan ve sandalın v hızıyla belirlenen $x = x' + vt$, $y = y'$, $z = z'$ dönüşüm formüllerini kullanmak gerekir ve yeter. Böylece $x = vt + a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$ ve $z = 0$ olduğu hemen anlaşılır. Zaten kıyıdan gözlenen ışığın çizdiği eğri de bundan başka bir şey değildir. Burada hemen belirtelim ki; t=0 anında O ile O'nün çakışık olduğu varsayılmaktadır.



Şimdi biraz önce sözü edilen ampulün yerine Q değerinde bir noktasal elektrik yükü koyalım ve ortaya çıkan alanı hem sandalda hem de kıyıda bulunan gözlemcilerin nasıl yorumlayacaklarına bakalım. Sandaldaki gözlemciler O' noktasına yerleştirilmiş bir yükün yarattığı statik elektrik alanından söz ederler ve buna ilişkin potansiyel fonksiyonunu

$$V'(x',y',z',t') = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}$$

olarak yazarlar. Burada t' ile zaman (sandaldaki) gösterilmektedir. Kıyıda bulunanlar için ise, kaynağı

$$\rho(x, y, z, t) = Q\delta(x - vt)\delta(y)\delta(z)$$

ve

$$\mathbf{J}(x, y, z, t) = Qv\delta(x - vt)\delta(y)\delta(z)\mathbf{e}_x$$

ile belirli olan bir elektromagnetik alan söz konusudur (buradaki t gene zamandır (kıyıdaki)). Buna ilişkin skaler ve vektörel potansiyel fonksiyonları da kolayca hesaplanır ve aşağıdaki gibi bulunur:

$$V(x,y,z,t) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - v^2/c_0^2)(y^2 + z^2)}}$$

$$\mathbf{A}(x,y,z,t) = \frac{v}{c_0^2} V(x,y,z,t)\mathbf{e}_x$$

Burada c_0 ile elektromagnetik alanın (ışığın) boşluktaki hızı gösterilmektedir.

Ampul olayında olduğu gibi, aynı fizik olayı tanımlayan $V'(x',y',z',t')$ ve $V(x,y,z,t)$ fonksiyonlarının bir koordinat dönüşümü ile birbirine dönüştürülmesini beklemek gayet normal karşılanmalıdır. Yani $\mathcal{L}$ uygun bir dönüşüm olmak üzere $V = \mathcal{L}\{V'\}$ veya

$$(*) \qquad \frac{1}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - v^2/c_0^2)(y^2 + z^2)}} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}\right\}$$

dir. Bu dönüşüm her şeyden önce evrensel, yani (x,y,z,t)'nin konumundan bağımsız olmak zorundadır. Sandalın hareketi dönme ve genişleme içermediği için zorunlu olarak,

$$(**) \qquad y' = y, \quad z' = z$$

olacaktır. Bu, her şeyden önce, yukarıdaki formüllerde yer alan $r'^2 = y'^2 + z'^2$ ile $r^2 = y^2 + z^2$'nin birbirine eşit olması demektir. Başka bir deyişle, hem V hem de V' fonksiyonu $r^2 \equiv \varsigma$'nın fonksiyonudur. $\varsigma > 0$ için yazılmış olan (*) bağıntısının kompleks - düzlemine analitik devamı, fonksiyonel denklemlerin devamlılığı ilkesi uyarınca, sağ ve sol yanda yer alan fonksiyonların analitik olarak devam edebildikleri her bölgede (*) denklemini sağlamaya devam eder. Yani, (*) denklemi sadece pozitif ς değerleri için değil, her kompleks ς için geçerlidir. Bu, her şeyden önce iki tarafta gözüken tekil noktaların aynı olmasını gerektirir. Sağ yandaki tekil nokta $\varsigma = -x'^2$'de, sol yandaki tekil nokta ise $\varsigma = -(x - vt)^2/(1 - v^2/c_0^2)$ de oluşan dallanma noktasından ibarettir. Bu demektir ki; $\mathcal{L}$ dönüşümü $\varsigma = -(x - vt)^2/(1 - v^2/c_0^2)$ noktasını $\varsigma = -x'^2$ye götürecek biçimdedir. Bu halde, (**)ı da göz önüne alarak,

$$(***) \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

yazarız[18].

[17] Ayrıntılar için bak. M.İdemen, Discontinuties in the electromagnetic field, John-Wiley, 2011.

[18] Ayrıntılar için bak. M.Idemen, Derivation of the Lorentz transformation from the Maxwell equations, J. of Electromagnetic Waves and Applications (JEMWA), vol.19 (4), pp:451-467, 2005. Ayrıca bak. M.İdemen, Discontinuties in the electromagnetic field, John-Wiley, 2011.

Şimdi yukarıda sözü edilen Q yükünü O noktasına koyalım ve aynı gözlemleri tekrar edelim. O noktası artık O' ye göre (-v) hızıyla hareket ediyor gibidir. Bu halde (***)'ın yerini

$$\text{(iv)} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}, \quad y = y', \quad z = z'$$

alır (***) ve (iv)'den t de çözülürse,

$$\text{(v)} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (v/c_0^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

olduğu anlaşılır.

Oldukça mütevazi görünüme sahip bulunan (v) formülleri 20. Yüzyıl'ın başlangıcında evrene ilişkin temel kavramlarımızda deprem niteliğinde yıkıntılara neden olmuştu. Bunların bazılarını biraz sonra açıklamaya çalışacağım. Ama ondan önce, kısa bir tarihçe gerekli görünüyor.

Burada bir noktasal yükün yarattığı alanın farklı görünen iki analitik ifadesinden hareketle, sadece matematik düşünceyle çıkarılmış olan (v) formülleri; 100 yıl kadar önce fiziksel düşünüşlerle, önce Poincaré ve Lorentz tarafından (1904), daha sonra da Einstein tarafından (1905) ortaya çıkarılmış bulunmaktadır. Onların bu konuya ilgi duymaları, 20. Yüzyıl'ın başlarında ışığın hızını ölçmek amacıyla yapılmış bulunan deneylerin, ışığı uyaran kaynakla ölçmeyi yapan gözlemcinin karşılıklı hareketlerinden (hızlarından) bağımsız, evrensel bir değer ortaya çıkarması nedeniyle olmuştu. Oysa 200 yıl kadar önce Ch. Huygens (1629-1695) tarafından fiziğe ithal edilmiş olan ve fizikçilerin büyük bir kısmı tarafından da benimsenmiş bulunan anlayışa göre ışık, "eter" adı verilen ve tüm uzayı dolduran bir ortamda yayılmaktadır. Bu nedenle, ışığın ölçülen hızı, ölçmeyi yapan kişinin kaynağa yaklaşması veya uzaklaşması durumumda farklı sonuçlar vermeliydi. Poincaré ve Lorentz deney sonuçlarına kılıf uydurabilmek için, eterin hareket halindeki ölçü çubuğuna basınç uygulayarak onun boyunu küçülttüğünü yeni bir varsayım olarak kabullenmişler ve büzülmenin (v) formüllerinde gözüktüğü kadar olması durumunda hesaplanan hız ile ölçülen hızın eşit çıkacağı sonucuna varmışlardı. Einstein ise, eter'in etkisini (varlığını) hiç hesaba katmadan, sabit bir hızla yayılan küresel dalgalara ilişkin kuvadratik formu invariant bırakan lineer dönüşümleri tartışarak aynı sonuca ulaşmıştı.

Bu kısa tarihçeden sonra konumuza dönelim ve (v) formüllerini yorumlamaya çalışalım:

1) x ile x' arasındaki ilişki ampul olayında kullandığımızdan farklıdır ve dönüşümde ışığın boşluktaki hızının da rolü vardır.

2) Sandalda ve kıyıda zamanı gösteren parametreler birbirinden farklıdır ve bunları birbirine dönüştüren denklemler hem bulunulan konuma hem de ışığın boşluktaki hızına bağlıdır. Yani, mutlak zaman diye bir şey yoktur.

3) Varlığı iki yüzyıl boyunca fizikçiler arasındaki sert tartışmaların nedeni olmuş bulunan eter gerçekte yoktur.

4) Işığın boşluktaki hızından daha büyük bir hızla enerji nakledilemez.

5) Doppler olayı olarak bilinen frekans kayması (v) formüllerinin apaçık bir sonucudur.

6) (v) formüllerinden hareketle çıkarılan

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + v\,dx'/c_o^2} = \frac{u'_1 + v}{1 + u'_1 v/c_o^2}$$

formülü, hızların toplanması için bilinen klasik $u_1 = u_1' + v$ formülünün geçersiz, $v = c_0$ olduğunda da, u_1' ne olursa olsun, her zaman $u_1 = c_0$ olduğunu gösterir. Bu, Poincaré ve Lorentz'in eter'e yeni bir özellik yükleyerek açıklamaya çalıştıkları, deneylere uyan sonuçtur.

7) Yukarıdaki yorumlar, 1687 yılından beri hayranlık uyandıran çok sayıdaki uygulamalara dayanak oluşturan Newton mekaniğinin geçerliliğinden şüphe duyulmasına da neden oldu. Çok şükretmemiz gerekir ki; Einstein basit bir düzeltme ile mekaniğe hak ettiği itibarı yeniden kazandırdı. Mekanik itibarını geri aldı, ama yeni şekliyle hiç de beklenmedik korkunç iddialarda bulundu. Bunlardan biri, o zamana kadar sabit bir değere sahip varsaydığımız kütlenin, hız ile $m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c_0)^2}$ şeklinde değişen bir büyüklük olarak tanımlanması gerektiği; bir diğeri de kütlede oluşan Δm kadar değişimin $\Delta E = (c_0)^2 \Delta m$ kadar enerji olarak açığa çıkacağı iddiası idi. Bu son formül, bir yandan atom bombası olarak bilinen felaketi, diğer yandan da atom santralı olarak bilinen enerji kaynağını akıllara getiren baş sorumlu oldu.

Konuşmamı şu son sözlerle bitirmek istiyorum: Bilimin yeni gelişmekte olduğu dönemlerde matematik ile doğal bilimleri, matematikçi ile de fizikçiyi ve mühendisi birbirinden ayırdetmek olanağı yoktu. Bugün bilim tarihçilerinin hemen hemen hepsi, gelmiş geçmiş en büyük 3 matematikçi olarak Archimed (M.Ö. 287-217) , Newton (1642-1729) ve Gauss'u (1777-1855) sayarlar. Ama iyi eğitim görmüş sıradan insanlar bunların üçünü de fizikçi olarak nitelemekte tereddüt etmezler. Çünkü Archimed'i, hidrostatikteki kendi adıyla bilinen meşhur yasası; Newton'u kendi adıyla bilinen ve rasyonel mekaniğin temellerini oluşturan yasaları; Gauss'u da kendi adıyla anılan magnetik alan birimi ile tanırlar. Diğer bilimlerde, özellikle de fiziğin deneysel konularında gelişmeler başlayınca, matematikçiler bunları, fizikçiler de matematiği izleyemez oldular.

20. Yüzyıl'ın başlarında durum tümden karıştı. Şöyle ki; teorik fizik, matematiğin desteği ile sınır tanımaz biçimde gelişmeler gösterdi. Matematik analizle ortaya çıkarılan ve ilk bakışta akıl almaz gibi görünen sonuçlar sonradan yapılan deneylerle uyum sağlayınca matematik-fizik denen çabalar yoğunluk kazanmaya başladı. 20. Yüzyıl'ın ilk çeyreğinde, içinde bulunulan durumu Hilbert (1862-1943) şu veciz sözlerle özetlemişti:

"Fizik fizikçilere zor geliyor."

Aynı sözleri bugün mühendislik için de söylemek yanlış olmaz: "Mühendislik mühendislere zor geliyor." Çünkü haberleşme, kontrol, işaret işleme, tomografi vb. dallarda artık çok yaygın olarak kullanılan yöntemlerin temelinde çok sofistike matematik kavramlar ve yöntemler yer almaktadır. Yani uygarlığımız her zaman matematiğimizin vesayeti altında, hurafattan uzakta güvencede olmuştur.